

Ж. ПИАЖЕ, Э. БЕТ, Ж. ДЬЕДОННЕ, А. ЛИХНЕРОВИЧ,
Г. ШОКЕ, К. ГАТТЕНЬО

ПРЕПОДАВАНИЕ МАТЕМАТИКИ

Перевод с французского
А. И. Фетисова

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Москва 1960

J. Piaget, E. Beth, J. Dieudonné, A. Lichnerowicz,
G. Choquet, C. Gattegno. L'enseignement des
Mathématiques. Delachaut A. Niestlé Neuchatel —
Paris; 1955.

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ПЕРЕВОДУ.

Предлагаемая вниманию советского читателя книга представляет собою, как указано в предисловии к подлиннику, первую публикацию коллективной работы Международного общества по изучению и улучшению преподавания математики.

Все те, кто внимательно следит за развитием математических наук и одновременно за эволюцией содержания и методов преподавания их основ в школе, не могут не заметить глубокого разрыва между современной математикой и математикой школьной. Этот разрыв, год от года увеличивающийся, не может не вызвать беспокойства со стороны всего общества, заинтересованного в том, чтобы школьное обучение способствовало разрешению различных практических задач текущего момента и было бы одним из важнейших факторов, обуславливающих прогресс человечества.

Вторая половина текущего столетия, которую можно назвать началом атомно-космической эры, характеризуется глубоким проникновением математики и ее методов в самые разнообразные и подчас неожиданные области человеческой деятельности. Отсюда, естественно, возникает вопрос: что же может сделать школа, чтобы удовлетворить эту неудержимо возрастающую потребность в расширении и углублении математического образования?

Чтобы ответить на этот вопрос, нужна большая работа, в которую должны включиться и специалисты-математики, хорошо знакомые с наукой в ее современном состоянии и более или менее ясно осознавшие пути ее дальнейшего развития, и те, кто ею пользуется в практических приложениях, т. е. физики, астрономы, инженеры и т. д., и те, кто несет математические знания в массы, т. е. преподаватели школ всех ступеней, и, наконец, те, кто должны выяснить возможности человеческого ума (и, в частности, детского) к восприятию и усвоению всего необходимого комплекса

знаний, т. е. психологи, методисты, педагоги. Вместе с тем несомненно, что кто-то должен осуществить анализ и синтез столь многочисленных фактов, проблем и точек зрения.

Одной из попыток такого анализа и синтеза является предлагаемая книга. Однако, как указано в предисловии, статьи не согласованы между собою и поэтому являются в известной степени «сырым материалом», полностью отражающим индивидуальные вкусы и устремления каждого автора. Поэтому читатель не найдет в этой книге общих выводов и указаний на какие-нибудь согласованные радикальные мероприятия, но все же ему будет полезно познакомиться с теми направлениями, в которых развивается педагогическая мысль на Западе.

В предлагаемых статьях многое является спорным, некоторые места вызовут недоумение или возражения советского читателя, но все же за авторами нужно признать искреннее желание найти пути к обновлению и улучшению содержания и методов преподавания математики в школе.

Мы сочли полезным снабдить перевод примечаниями, помещенными в конце книги. Примечания помечены номерами в квадратных скобках.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Эта книга представляет собою первую публикацию результатов коллективной работы Международной комиссии по изучению и улучшению преподавания математики. В подготовке книги принимали участие шесть членов-учредителей: один психолог, один специалист по математической логике, три профессиональных математика и один педагог-математик.

Статьи не были согласованы между собою. Только г. Пиаже написал свою главу после ознакомления с другими. Бюро Комиссии, ответственное за эту книгу, имело целью представить труд, выявляющий разнообразие опыта его авторов, работавших над одной и той же проблемой. Оно предполагало, что, несмотря на некоторую мозаичность содержания, книга все же поможет читателю, привыкшему к анализу, заметить направление современных взглядов, обуславливающее связь между членами Комиссии.

Не считая нужным сглаживать различия между точками зрения авторов отдельных глав, мы нашли полезным представить на рассмотрение самого читателя эту книгу, являющуюся первой публикацией нашей работы. Члены-учредители, заметив, что работа по улучшению преподавания математики, которую они выполняли самостоятельно, могла бы сделаться более эффективной при координировании с работами других авторов, объединились в Комиссию. Эта Комиссия состоит из лиц, работающих в области психологии, методологии и практики, а взаимосвязь между этими областями необходима для проведения реформ, улучшающих преподавание математики. Состав Комиссии обусловлен стремлением привлечь в нее людей, эрудиция которых охватывала бы и математику, и психологию, и историю математики, и педагогику.

Руководящий циркуляр Комиссии содержит следующие положения:

«Комиссия ставит своей целью выяснение и разрешение проблем, связанных с улучшением преподавания математики.

Преимущество математики заключается в том, что существуют фундаментальные исследования в области ее оснований, логики, эпистемологии, истории, психологии мышления и экспериментальной педагогики. В функцию Комиссии входит синтез достижений всех этих дисциплин в их основном содержании.

Понятия, с которыми связаны проблемы преподавания математики, по существу интернациональны, так как различия, порождаемые культурами народов, менее существенны, чем сходство, являющееся результатом структуры науки и математической мысли. Поэтому было возможно организовать интернациональные бригады из лиц, имеющих общие интересы, и регулярные встречи их для того, чтобы результаты исследований были координированы и подготовлены для распространения. После выявления объектов изучения оставалось найти способы сопоставления результатов, полученных в различных науках и обычно не имеющих контактов между собою, — способы, позволившие согласовать взгляды различных авторов.

Начальная работа Комиссии состояла, таким образом, с одной стороны, в координации того, что было сделано, а с другой — в руководстве исследованиями в различных странах. Сегодня мы можем заявить, что обе эти задачи нами успешно разрешены. При разрешении первой задачи применялся метод интернациональных семинаров, в которых принимали участие преподаватели математики, а в отдельных случаях — инженеры, логики, психологи, историки. В течение определенного числа дней (от 6 до 14) проводилась интенсивная работа — рассматривался ли мало определенный вопрос, как «Непрерывность школьных и университетских программ», или изучались детали, как «Исследование ошибок учеников при обучении математике».

Темы семи встреч, организованных с 1950 года, дадут понятие об изучавшихся вопросах.

В апреле 1950 года в Дебдене близ Лондона:

«Отношение между программой математики школ второй ступени и развитием интеллектуальных способностей подростков».

В апреле 1951 г. в Кебергене возле Брюсселя:

«Преподавание геометрии в первых классах школ второй ступени».

В августе 1951 г. в Герсберге на Ааре в Швейцарии:

«Действующие программы от материнской школы до университета».

В апреле 1952 г. в Роштоне во Франции:

«Структуры математические и структуры мышления».

В апреле 1953 г. в Вейлербахе в Люксембурге:

«Отношение между преподаванием математики и потребностями современной науки и техники».

В июле 1953 г. в Кальве в Форé-Нуар:

«Взаимоотношение между мышлением учеников и преподаванием математики».

В августе 1954 г. в Остербене в Голландии:

«Современная математика в школе».

В апреле 1955 г. в Беллано в Италии:

«Ученик перед лицом математики. Педагогика, которая освобождает».

Для разрешения второй задачи национальные и интернациональные группы были объединены внутри Комиссии, и, хотя их работы еще не опубликованы, мы вправе предсказать им хорошее будущее, имея в виду число и квалификацию лиц, принимавших в них участие.

Результатом работы, которая осуществлялась главным образом членами Комиссии, мы можем также считать: 1) основание в 1952 г. в Великобритании Общества технической помощи в преподавании математики, которое насчитывает 300 членов и среди них 40 иностранцев; 2) основание в 1953 г. бельгийского Общества преподавателей математики, которое тоже насчитывает более 300 членов. Эти две группировки издают свои собственные бюллетени, которые распространяют то новое, что имеется в Комиссии, и разрешают вопросы, относящиеся к их компетенции; 3) образование в 1953 г. группы учебных занятий в Париже, происходящих под руководством членов Комиссии.

Комиссия предполагает распространять в монографиях и симпозиумах работы, которые могут способствовать улучшению преподавания математики. Так как системы преподавания в различных странах существенно отличаются друг от друга, мы решили до обнародования всех результатов работы Комиссии выпускать одновременно на немецком, английском и французском языках обращения к учителям, написанные по возможности людьми, хорошо известными в данной стране. Целью этих обращений должно служить доведение до сознания учителей принципиальных проблем, вызываемых необходимостью обновления преподавания.

В процессе преподавания в классе осуществляется синтез, который предполагает наличие: 1^о-умов, воспринимающих изучаемый предмет, 2^о— учителей, которые ищут методы, обуславливающие наилучшее понимание, 3^о— математических структур, сформировавшихся в результате исторического процесса, в котором сочеталось влияние многих темпераментов, умов и социальных тенденций.

Настоящая книга, не претендуя на то, чтобы полностью рассмотреть этот синтез, начинает с изучения природы математической реальности. Никто лучше г. Пиаже не мог бы провести такое генетическое исследование и предложить учителям солидную базу для выявления этой важной составляющей синтеза.

Глава г. Бет внесет ясность в изучение вопроса о роли авторитетов, вопроса, еще не вполне разрешенного, но волнующего тех, кто изучает основы математики. Дискуссия по вопросу о взаимоотношениях между логикой и психологией заинтересует читателя, которому нужно решить, какой же из этих наук он должен

руководствоваться в своем преподавании. Все будут благодарны автору, который так четко изложил свои мысли и выразил с предельной ясностью то, что бессознательно принималось преподавателями, особенно в странах европейского континента.

Ж. Дьедонне придерживается идеи введения математических структур, следуя исторической перспективе. В его изложении развитие интеллектуальных способностей рассматривается как переход на высшую ступень абстракции и, следовательно, подчеркивается математическая точка зрения. Мы надеемся, что преподаватели школ второй ступени извлекут из этой главы сведения, которые им помогут перебросить мост между классической культурой и культурой современной, открывая дорогу к более полному пониманию фундаментальных структур математики.

Как дополнение к предыдущей статье, в статье г. Лихнеровича сосредоточено на нескольких страницах большое число вопросов, которые вызовут глубокий интерес у преподавателей и дадут им стимул к обновлению методов преподавания.

Глава г. Шоке отличается от других тем, что в ней автор не предлагает ни своего личного мнения, ни введения нового материала. Она содержит оригинальный метод изложения основ геометрии. Глава написана для преподавателей, так как ее автор глубоко интересуется проблемами преподавания. Преподаватели элементарной геометрии извлекут большую пользу от чтения этой работы. Изучение этой главы приведет от рассмотрения общих проблем, изложенных в предыдущих главах, к более специальным и более знакомым в школе проблемам, составляющим содержание последней главы.

К. Гаттеню в последней главе указывает, как могут быть представлены некоторые пункты программ элементарной математики. Опасность в области педагогики заключается в подражании. Почти все уроки, даваемые в различных странах, похожи друг на друга. Это вовсе не обусловлено успехами применяемых методов (успехами, увы, весьма скромными), но тем, что существующая схема урока была повсеместно принята уже четыре столетия тому назад. Чтобы новый метод, в свою очередь, не стал техническим стереотипом, уроки последней главы даются в эскизах, оставляя инициативе читателя возможность их практической реализации. Во всяком случае, трактовка обычных программ с функциональной точки зрения находится в соответствии с требованиями практики.

В целом, хотя с первого взгляда читателю может показаться, что в этой книге множество различных идей собрано в одно целое, мы надеемся, что их внутренняя связь не ускользнет от него.

Нам нужно знать личность учащегося и иметь представление о том, что именно мы делаем на уроках математики, прежде чем пытаться усвоить технические тонкости. Вот почему психологическая глава идет на первом месте, а педагогическая — на последнем. Между методом, указывающим, как нужно делать, и возмож-

ностью выполнить эти указания, обусловленными учителем и учащимися, имеются проблемы, которые служат предметом размышлений. Эти проблемы интересуют и логика и формалиста и могут быть разрешены творческим математическим умом, способным преобразовывать наши понятия.

Мы надеемся, что наши авторы, рассматривая в своих главах темы, интересующие Комиссию и общественность, тем самым будут содействовать возникновению соревнования среди преподавателей.

Б ю р о

СТРУКТУРЫ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ОПЕРАТОРНЫЕ СТРУКТУРЫ МЫШЛЕНИЯ¹.

Жан Пиаже.

I.

Станем на практическую точку зрения педагога, задачей которого является преподавание математических истин, или на теоретическую точку зрения эпистемолога*, размышляющего о сущности математических объектов, тогда центральная проблема представится в двух аспектах: порождены ли математические отношения деятельностью ума или эта деятельность только открывает их, как некую внешнюю реальность, действительно существующую. Эта проблема, такая же древняя, как восточная философия, с современной точки зрения может быть поставлена, как одна из проблем психологии и даже психологии ребенка. Одна из задач изучения умственного развития заключается в том, чтобы установить: достаточны ли действия субъектов и операции мысли для получения конструкции математических объектов или эти последние были открыты извне, как физические сущности с их объективными свойствами. Таковыми являются также объекты, созданные синтагмами языка, присущими социальной группе данного индивидуума. (Нам известно, что взаимосвязь между объектами логико-математическими и лингвистическими признается значительным числом логистов и основана или на теории конвенционалистов, или на теории платоников.) [1]

И вот если методы приближения к разрешению этой вечной проблемы могут быть улучшены путем обращения к генетической

¹ Статья, которая составляет эту главу, обсуждалась на конференции в Решепте около Милана в 1952 г. Этот коллоквиум, посвященный, между прочим, изучению математических и психологических структур, начинался сообщением г. Дьедонне по первой из этих тем. Доклад, который следовал за ним, отвечал на доклад Дьедонне с точки зрения психологической. Вот поэтому он часто ссылается на тезисы этого автора, не резюмированные в настоящей статье, но согласованные с тезисами Бурбаки в целом. (См. Бурбаки «Строение математики» в книге «Главные направления математической мысли», изданной Ф. Ле Лионне).

Bourbaki. L'architecture des mathématiques in Les grands courants de la pensée mathématique, édité par F. Le Lionnais, 1948 (см. прим. [3]).

* Эпистемология — наука о законах познания (от греческого — *ἐπιστήμη* — знание).

психологии, то сами понятия проблемы были недавно обновлены благодаря работам Бурбаки в области строения математики и благодаря фундаментальной роли, отведенной в этих работах понятию «структуры».

Основой общего здания математики долгое время считались некоторые простые объекты, рассматриваемые более или менее изолированно друг от друга. Это были целые числа, которые Кронеккер приписывал самому богу, противопоставляя их всем остальным числам, изобретенным человечеством. Это были точка, линия и т. д., композиции которых порождали пространство. Но это всегда были вещи, данные сами в себе, которые наш разум привлекал или для созерцания, если он еще не осознал роли операций, или для манипуляций над ними, если он употреблял их как простые элементы, как средства производства, которые использует каменщик, чтобы зацементировать первоначальный материал при постройке стены или дома.

Но если в основу положить понятие структуры и если благодаря ему познание переходит одновременно от простого к сложному и от общего к частному, то перспективы будут совершенно иные.

Структура, как например «группа», есть система операторная, и возникает вопрос, существуют ли до нее эти чрезвычайно разнообразные элементы, над которыми оперирует структура, т. е., другими словами, имеют ли они значение достаточно независимое от нее или, наоборот, они суть результат действия структуры — действия не вполне ясного вначале, потому что порядок сознания противоположен порядку генезиса, которым определяются эти элементы. Более точно, психологическая проблема (а это единственная, которую мы будем иметь в виду) заключается в том, чтобы выяснить: или объекты, служащие элементами структуры, представляют собою результат операций, которые их породили, или они предшествовали операциям, последовательно включаясь в них. [2]

Перестройка, которую вносит идея структуры в ход определений и доказательств, играет существенную роль в этом отношении. Вместо того чтобы определять элементы изолированно, путем соглашения или конструктивно, структурное определение состоит в том, чтобы характеризовать их путем операторных взаимоотношений, которыми определяются их функции в системе.

Структурное определение элемента будет иметь место при доказательстве существования этого элемента, так как он рассматривается, как принадлежащий к системе, состоящей из отдельных взаимозависимых между собою частей. Таким образом, принцип аксиоматической полноты системы дается с самого начала, и эта полнота будет обязательно операторной природы. То же самое происходит и в системе чистых отношений, каковыми являются структуры порядка: если произведение двух отношений есть тоже отношение, то это значит, что они координированы между собою операциями логики отношений.

Не менее замечательны преобразования, полученные благодаря введению понятия структуры в «архитектуру» математических наук, другими словами, в порядок, в конструкцию или преэссенциальность многочисленных классов, которые можно различать в этих абстрактных объектах. По этому поводу можно сказать, что введение структур представляет собою прогресс, аналогичный тому, какого сравнительная анатомия добилась в биологии, установив классификацию, основанную на внутренних генетических связях, по сравнению с классификацией, опирающейся на внешние признаки в их разрозненной статичности. Если отправляться от нескольких основных структур, то дальнейшее движение состоит в их дифференциации от общего к частному и в комбинировании их друг с другом от простого к сложному. Так получается конструкция, заменяющая прежнее внешнее сочетание отдельных областей науки серий систем, подчиненных друг другу, согласно вышеуказанным двум методам получения. Отсюда следует снова принцип полной подчиненности элементов или классов элементов динамике конструкции в собственном смысле слова.

Отметим также большой интерес для психологии математической мысли к методу открытия структур — и это нас вновь приведет к исходной альтернативе: либо строение математики есть результат работы мысли, или идеальные объекты действительно существуют и наш разум схватывает их как бы извне. На первый взгляд наблюдения за попытками математика получить фундаментальные структуры, кажется, приводят ко второму из этих положений. Далекий от того, чтобы обнаружить их сразу, он замечает аналогии, получаемые от сравнения друг с другом форм рассуждений в областях, не имеющих заметного сходства друг с другом, потом, в известной степени индуктивно и исходя из экспериментальных фактов, он находит общие методы, вплоть до выделения наиболее общих законов искомой структуры. И только тогда вступает в дело аксиоматика, т. е. применение этих общих законов к частным теориям путем прогрессивной дифференциации. Более того, переход от первоначальных структур к структурам вторичным совершается путем комбинаций многочисленных структур: и здесь эта комбинация не есть еще дедукция, потому что для каждой новой структуры нужно использовать новые аксиомы, чтобы в нее можно было бы включить новые элементы.

Хотя этот переход к открытию структур является до некоторой степени индуктивным, он все же раскрывает отношения структуры к элементам, которые она упорядочивает. Если, исторически, эти элементы кажутся данными до открытия структуры, и если эта последняя играет таким образом существенную роль рефлексивно-инструмента, предназначенного выявлять их наиболее общие свойства, то не надо забывать, что психологически порядок осознания противоположен порядку генезиса: то, что является первым в порядке сознания, будет последним в рефлексивном анализе,

потому что субъект осознает результаты умственных построений до того, как они постигаются внутренними механизмами¹.

Мы далеки от того, чтобы выдвигать определенный аргумент в пользу независимости «структур» по отношению к работе мышления. Их позднее и как бы индуктивное открытие заставляет, наоборот, предполагать их первоначальный и порождающий характер. Но если эти основные мысли выразить в терминах анализа, то мы убедимся, что обратное предложение не будет обязательно верным и возникает проблема: как избавиться от случайных связей между первоначальными структурами математики и операторными структурами, которые, с точки зрения умственного развития, можно рассматривать как основные части логико-математической конструкции. Это и требуется теперь рассмотреть с точек зрения психоге-незиса.

Три фундаментальные структуры, на которых покоится здание математики, по определению Бурбаки, суть алгебраические структуры, прототипом которых является «группа», структуры порядка, к которым относятся использующаяся сейчас с таким успехом (излишне даже в некоторых случаях) «решетка», и структуры топологические. Число *три* не является исчерпывающим, и развитие математики может его увеличить. Но при настоящем состоянии знаний эти три структуры являются неприводимыми по отношению друг к другу и играют таким образом роль основных структур. [3]

Большой интерес вызывает тот факт, что если проследить до самых истоков психологическое развитие арифметических и геометрических операций в сознании ребенка и особенно операций логических, осуществляющих в них все необходимые предварительные условия, то вновь находят все этапы — вначале фундаментальные тенденции к организации целого или системы, вне которой элементы не имеют ни значения, ни вообще существования, а затем распределение этих систем совокупностей по трем типам, которые в точности соответствуют структурам алгебраическим, структурам порядка и топологии. Это мы и собираемся показать, рассматривая их одну за другой, чтобы выявить потом основной смысл этого совпадения.

II.

Нужно прежде всего напомнить, что понятие структуры формировалось в течение нескольких десятилетий, независимо от современной эволюции математических дисциплин, как одно из привычных понятий психологии познавательных функций (восприятие

¹ Подумайте, например, о запоздалом введении Кантором операции приведения элементов во взаимно однозначное соответствие, которая является одной из главных операций при формировании понятия целого числа у ребенка и у дикаря.

и рассудок). В совершенно различных областях психологи вынуждены были допустить, что «естественное» течение ума, состоящее в отыскании первоначальных элементов и выведении новых путем сочетания с другими, покоилось на ошибочных аналогиях с материальным производством. В области восприятий, в частности, где действие поля сознания можно легко проанализировать экспериментально, пришли к выводу, что так называемые «элементы» суть всегда продукты диссоциации или вычленения из целого внутри начальной совокупности и что ни одно частное соотношение не может быть выделено без выявления с самого начала характерных структурных свойств совокупности.

В специальной области рассудка, которая одна нас здесь интересует, обобщения играют ту же самую роль, но они представляют здесь иную форму, чем в области восприятий. Ум выявляется, по существу, как координация действий. Эти последние суть вначале просто материальные или чувственно двигательные процессы (без вмешательства символики и отображения), но уже и тогда они несут в себе схемы, которые допускают определенные структуры обобщения. Потом с помощью функциональной символики, и особенно с помощью умственных и языковых отображений, действия прогрессивно самоуглубляются, и после более или менее длительного периода транспозиции между материальным актом и актом воспроизведения (период, который мы назовем периодом подготовительной мысли между двумя и семью-восемью годами) они преобразуются в действия в собственном смысле этого слова и представляются тогда под типичной формой структурных совокупностей, характерных для интеллекта.

Чтобы понять сущность этих операторных структур, надо исходить из основного факта, что в противоположность процессам перцепции, которые необратимы, потому что зависят от формы возможных композиций, ум с самого начала опирается на обратимость [4], значение которой в процессе развития все время увеличивается. Без сомнения, начальные чувственно-двигательные действия тоже необратимы, потому что они направлены к единственной практической цели, которую они стремятся достигнуть. Но, начиная с момента координации чувственно-двигательных схем, ум становится способным к известной подвижности в прямом и обратном направлении, и тогда можно видеть появление обратимости более или менее систематической, которая обнаруживается в области представлений. В этом новом плане обратимость еще далека до полного завершения. В продолжение всей подготовительной фазы субъект больше рассуждает конфигурациями, чем преобразованиями, и вопрос состоит в том, чтобы научить его мыслить, чего он достигает в действии (например, представляет себе систему перемещений после того, как он уже выучился совершать это материально). Точно так же представления, возникающие в течение всего раннего периода детства, включают в себе систематические трудности в отношении обратимости и, следовательно, в сохранении элементар-

ных инвариантов (длина, расстояние, непрерывные совокупности, физические величины и т. д.). Но, начиная с этой дооперативной фазы, все более и более регулируемое действие ведет к постоянному исправлению ошибок, исходящих от начальной необратимости, и приходит таким образом к оперативной обратимости.

Появление первых систематических действий к семи-восемью годам указывает на переход к состоянию равновесия, к которому стремилась мысль в продолжение предшествующей начальной фазы, и надо хорошо понять это отношение прогрессивного равновесия между фазой дооперативной и первым оперативным периодом (от 7 — 8 до 11—12 лет), чтобы не рассматривать эту последнюю как безусловно начальную форму.

Зарождающиеся операции, таким образом, подготовлены чувственно двигательными координациями и регулярными дооперативными отображениями и обнаруживают тогда следующие свойства. Они суть действия в буквальном смысле, являясь продолжением материальных предшествующих действий, но в то же время внутренне мыслимых, благодаря способности выражаться символически. Они по существу обратимы, т. е. другими словами, операции и действия могут разворачиваться в двух направлениях, и понимание одного из этих направлений вызывает *ipso facto** понимание другого. И особенно важно то, что с самого начала они являются связанными с одной и той же системой: не существует изолированной операции потому, что изолированное действие не будет операцией. Операция, таким образом, необходимо сочетается с другими операциями, и сама их природа отвечает этому свойству мобильной и обратимой композиции внутри системы. Таким образом, операторные структуры появляются, как только появляются операции, а структура целого не является последующим продуктом композиции между дооперативными операциями, потому что действие, вначале необратимое, становится операторным и обратимым только внутри структуры и под влиянием своей собственной организации.

Прежде чем перейти к детальному рассмотрению типов структур, отметим еще, что обратимость, составляя, без сомнения, фундаментальный закон композиции, свойственный уму, представляется с самого начала (т. е. от схем чувственно-двигательных) под двумя формами — взаимодополняющими и неприводимыми: обращение, или отрицание, и взаимность. Когда ребенок от 10 до 12 месяцев, начинающий систематическим образом организовывать перемещения в ближайшем к нему пространстве, переместил предмет из *A* в *B*, он может аннулировать это преобразование обратной транспозицией, переводя предмет обратно из *B* в *A*, что в итоге эквивалентно нулевому движению. Но он может также оставить предмет в *B*, а сам переместиться из *A* в *B*, что воспроизведет начальное положение, когда предмет был против его собственного тела.

* *Ipsa facto* — в силу самого факта.

В этом случае движение предмета не было аннулировано, но оно просто компенсировалось путем соответствующего перемещения собственного тела, что составило другое преобразование. Не имея намерения заключить в логические нормы поведение ребенка, отметим все же, что эта существенная разница между отрицанием и обращением и между взаимностью и компенсацией определяется с самого начала две формы обратимости, которые будут находиться рядом в продолжение всего развития и которые превратятся в синтез в единой системе только в формальных операциях после 11 — 12 лет, когда построится группа четырех форм суждений [5] (которые, если мы используем пример перемещений, только тогда позволят ребенку координировать в одно все перемещения по двум системам отсчета сразу — одно мобильное, другое неподвижное).

Теперь мы уже сможем уточнить, в каком смысле три фундаментальные структуры Бурбаки соответствуют элементарным структурам мышления, формальным продолжением которых они являются.

III.

Алгебраические структуры, а именно «группы», соответствуют операторным механизмам ума, подчиненным первым из двух форм обратимости, которую мы называем **инверсией** или отрицанием (произведение операции на обратную есть тождественная операция, или нулевое преобразование).

В этом отношении необходимо обратить серьезное внимание на тот факт, что, как бы ни запаздывало открытие понятия группы в математике (XIX век), такая структура изображает в действительности определенные, наиболее характерные для мышления механизмы.

Вспомним с этой точки зрения четыре элементарных свойства группы: произведение двух элементов группы дает также элемент группы; всякой прямой операции соответствует одна и только одна обратная; существует операция тождества и последовательные композиции ассоциативны. Выраженные на языке интеллектуальных действий эти четыре свойства означают: (1) координация двух систем действия составляет новую схему, присоединяемую к предыдущим; (2) координация может по желанию осуществляться или быть упраздненной или, проще говоря, интеллектуальное действие (операция) может развиваться в двух направлениях; (3) при возвращении к исходной точке мы находим эту точку неизменной; (4) к одной и той же данной точке можно прийти различными путями, причем сама точка останется неизменной. В общем смысле «группа» есть символический перевод некоторых определенных фундаментальных свойств действия мышления: возможность координации действий, возможность возвращения и отходств. Но, более того, собственные преобразования группы всегда связаны с определенными инвариантами, откуда следует, что построение группы идет параллельно с построением инвариантов, которые к

ней относятся. Что касается непосредственных форм организации, которые осуществляются мышлением в процессе своего развития, то первоначальной необратимости операций соответствует отсутствие сохранения их, а построению обратимых структур соответствует выработка сохранения понятий в построенной таким образом области.

Начиная с чувственно-двигательного уровня, эти процессы можно рассматривать путем практического предвосхищения (связанного с ближайшим пространством) того, чем станут эти операции в области представления или мышления. Так, в продолжение первых месяцев существования перемещения не могут быть организованы в «группу», потому что они сосредоточены на собственном теле и являются следствием определенных систематических ошибок, вызванных этим эгоцентризмом¹. На этом уровне нет также еще постоянных объектов на пути собственного действия. К концу первого года, наоборот, появляется одновременное осуществление этой экспериментальной группы перемещений, уже упомянутых Пуанкаре (но которые он считал врожденными, тогда как они составляют конечную устойчивую чувственно-двигательную форму организации), и выработка схемы постоянных предметов (в функции последовательных локализаций, каковыми являются приближения и удаления).

Развитие предметного мышления в период дооперативной фазы и на уровне первых конкретных операций (7 — 11 лет) дает аналогичную картину. Пока имеется необратимость мысли, мы не сможем получить понятие постоянства даже в областях наиболее простых наблюдений (сохранение совокупности в случаях изменения конфигурации ее элементов; сохранение эквивалентности между двумя соответственными совокупностями, когда одни элементы рассматриваются с точки зрения других, не представляя больше оптического соответствия; сохранение равенства длин двух твердых стержней, когда один из них немного смещен по отношению к другому; сохранение расстояния между двумя неподвижными элементами, когда новые элементы вставляются между ними и т. д., и т. д.). Напротив, строение первых предметных обратимых структур к 7 — 8 годам фактически влечет за собою переработку соответствующих понятий постоянства.

Бесполезно производить здесь описание многочисленных обратимых структур алгебраического типа, которые мы отметили в другом месте, при переработке ребенком 6 — 8 лет понятий целого числа, проективных или евклидовых прямых, геометрической меры, времени и т. д. Важно напомнить, что каждая из этих конструкций предполагает предварительную логическую переработку применением логики классов и что первые операции этой логики, которые доступны ребенку, требуют для их осуществления опреде-

¹ См. Ж. Пиаже «Построение действительности у ребенка», главы I и II. Piaget. La construction du réel chez l'enfant, chap. I—II.

ленных структур алгебраического типа, еще не идентичных с группой, но представляющих все же некоторые из ее свойств.

Возьмем в качестве примера включение частного класса A в общий класс B . Кажется, нет ничего легче понять действие такого включения, если все элементы расположены одновременно в одном и том же поле восприятия. Пусть, например, B равно совокупности нескольких деревянных шариков, A равно части B , образуемой из 20 коричневых шариков, и A' равно другой части, образуемой из 2—3 белых шариков. Между тем достаточно спросить у ребенка, будет ли все B более или менее многочисленно, чем большая часть A (или «имеется ли здесь больше шариков из дерева или больше шариков коричневых?» и т. д.), чтобы заметить оперативную сложность этого действия включения. До 7 лет в среднем ребенок ответит, что A одерживает верх над B , и это потому, что тотчас же, как B разлагается на части, это целое, как таковое, уже не существует, а то, что остается от B , есть только другая часть A' («имеется больше коричневых, чем деревянных, потому что осталось всего два белых», говоря так, ребенок все же знает, что коричневые шарики тоже из дерева). Чтобы установить отношение $A < B$, ребенок должен пройти через обратимую операцию $A + A' = B$, откуда $A = B - A'$ и $A' = B - A$. И только тогда достигается обратимость логического сложения и вычитания классов, когда целое B сохраняет независимость от подразделений, которые можно в нем усмотреть. Другими словами, включение части в целое уже само предполагает в себе предварительную алгебраическую структуру.

Из чего состоит эта структура? Ее наиболее простая форма, которую мы называем структурой элементарных «группировок», может быть иллюстрирована, например, классификациями или суммарными группировками классов.

Основные из этих операций суть:

(1) $A + A' = B$; $B + B' = C$; $C + C' = D$ и т. д., где все классы одного и того же порядка разъединены ($A \times A' = 0$; $B \times B' = 0$ и т. д.),

(2) $-A - A' = -B$, откуда $A' = B - A$ и т. д.,

(3) $A - A = 0$,

(4) $A + A = A$ (тавтология),

(5) ассоциативность, ограниченная в нетавтологических операциях:

$(A + A') + B' = A + (A' + B')$, но $A + (A - A) \neq (A + A) - A$.

В этих структурах мы узнаем определенные преобразования, общие с «группой», такие, как $+A$, $-A$ и 0 . Но ассоциативность, с одной стороны, ограничена, а, с другой стороны, преобразования осуществляются только над смежным классом, т. е. над классом непосредственно высшим. Эти два ограничения, естественно, сильно уменьшают общность этой структуры. Но с точки зрения генетической она представляется не менее интересной, потому что выявляет, без сомнения, необходимость перехода через алгебраические

структуры для получения наиболее простых логических конструкций.

Отметим также, что некоторые формы научной мысли принадлежат структурам этого типа, например зоологическая классификация, в которой мы находим каждый из этих признаков, включая и смежность (нельзя расчленить два таких класса, как «верблюды» и «черви», чтобы сделать из них новый класс, не проходя через серию выключения типа: $A' + C' = D - B'$ и т. д.).

С другой стороны, мы видим, что эти структуры образуют с точки зрения структуры порядка неполные сетки, потому что все внутренние границы между классами одного и того же порядка нулевые. Но с интересующей нас здесь точки зрения возникновения структур от механизмов непосредственного развития ума, гораздо важнее найти вне структур главное значение определенных первоначальных форм организации, которые выявляют их примитивный характер, так как они ускользнули от формулировок логистов и математиков.

IV.

Структуры порядка, к которым мы теперь обратимся, суть так называемые структуры отношений, а не действий: таковы, например, «сетка» и «решетка». Примем некоторые условия. Без сомнения, можно полностью определить сетку в терминах отношений вместо введения операций $+$ и \times : в этом случае мы рассматриваем как основные понятия « x предшествует y » или « y следует за x », вместо того чтобы получить их из операций $x \times y = x$ и $x + y = y$. [6] Но даже при рассмотрении отношений между полуупорядоченными элементами остается все же то, что транзитивность, «если x предшествует y , y предшествует z , а потому x предшествует z », состоит в соединении двух операций в одну, которую мы будем рассматривать как операцию аддитивную, но произведенную над отношениями.

Но сетка не есть только операторная структура: в действительности она является еще и структурой обратимой. Большое психологическое значение этих систем заключается в том, что их обратимость не является под общей формой инверсии или отрицания. (Лишь некоторые виды дистрибутивных сеток являются определенным образом дополнительными и обладают, таким образом, «дополнительными элементами первого и второго рода».) Главная обратимость, свойственная сетке, есть «взаимность». Действительно, сетка включает в себе закон двойственности, который состоит в том, чтобы менять знаки \times и $+$ точно так же, как отношения «предшествует» и «следует». Применим теперь закон двойственности в следующем примере, обозначая символом \rightarrow отношение «предшествует» и символом \leftarrow отношение «следует»:

$$(1) AB \rightarrow A \text{ и } AB \rightarrow B; A \rightarrow (A + B) \text{ и } B \rightarrow (A + B),$$

откуда

$$(2) (AB) \rightarrow (A + B),$$

в силу двойственности в этом случае имеем:

$$(3) (A + B) \leftarrow (AB). [7]$$

Итак, констатируем, что (3) совсем не является отрицанием (2), но, наоборот, оно является простым обращением отношения (2).

В основном закон двойственности, свойственный сетке, не приводит к инверсии или отрицанию, как это имело место в алгебраических структурах, но к перемене, основанной на взаимности, т. е. перестановке порядка. В то время как инверсия приводит к отрицанию самой операции, независимо от отношения порядка, взаимность возвращается к изменению порядка, без отрицания операций в действии.

Структуры порядка так же фундаментальны для механизма мышления, как структуры групп (или другие смежные структуры), и легко показать, как мы делали для этих последних, что они формируются на дооперативном уровне, начиная с действий чувственно-двигательных, и *a fortiori** в течение всего периода зрительных представлений от 2 до 7—8 лет. Но ограничимся характеристикой роли, которую они играют на уровне конкретных операций (7—11 лет), до появления словесных или формальных операций (11—12 лет) и выявлением роли их взаимоотношений на этом первом оперативном уровне по сравнению с алгебраическими структурами.

Структуры порядка образуются в продолжение этого периода от 7 до 11 лет системами отношений. В то время как элементарные группировки классов покоятся на методе обратимости, группы отношений покоятся на другом принципе, а именно на взаимности.

Наиболее простым примером этих самовозникающих систем, развитие которых можно проследить на чувственно-двигательной деятельности и которые достигаются в периоде равновесия (т. е. на своем оперативном уровне) в возрасте 6—7 лет, являются связи асимметричных транзитивных отношений или «качественной серийности». Начиная с чувственно-двигательного уровня, когда

ребенок от $1\frac{1}{2}$ до 2 лет строит башню, кладя в основание ее самые большие кубики и продолжая строить во все уменьшающемся порядке, можно сказать, что он вырабатывает путем проб (попытки и неудачи) практическую схему, подготавливающую серийность. Но здесь мы имеем только эмпирическую схему, основанную на воспринимаемой конфигурации и на бросающемся в глаза неравенстве объектов. Если вместо этих элементов, разница в величине между которыми заметна с первого взгляда, мы предоставим ребенку элементы, которые нужно более детально сравнивать попарно (например, 10 стержней от 10 до 19 см, расположен-

* *a fortiori* — тем более.

ных в беспорядке), то должны будем констатировать, что систематическая серийность есть нечто другое, чем серийность эмпирическая и что она предполагает комплекс операторных действий. Действительно, после серии подготовительных этапов (совокупностей маленьких серий, не координированных между собою, с последующими исправлениями) ребенок придет к ним, но только в возрасте $6\frac{1}{2}$ — 7 лет [8], открывая метод, который на этот раз

обеспечит конструкцию полной и точной серийности без проб и ошибок: он ищет путем сравнения самый маленький из всех стержней — A и кладет его; он отыскивает путем таких же сравнений самый маленький из оставшихся — стержень B и кладет его рядом с A ; он отыскивает стержень C — самый маленький из еще не определенных стержней и т. д. Выявляющийся здесь метод предполагает понимание следующих отношений: (I) что какой-нибудь элемент E будет больше всех предшествующих: $E > A, B, C, D$; (II) что этот же самый элемент меньше всех последующих: $E < F, G, H$ и т. д. Более того, существенно отметить, что на уровне серий, производя пробы, ребенок вовсе не будет уверен в транзитивности неравенств: после того как он увидел рядом два элемента $A < B$ и два элемента $B < C$, он может не заметить отношение $A < C$, если от него спрятать A , оставив на виду C . Напротив, открытие двух отношений $E > D, C$ и т. д. и $E < F, G$ и т. д. влечет *ipso facto* транзитивность — (III) $A < C$, если $A < B$ и $B < C$.

Если мы захотим установить отношения, используемые ребенком в процессе этого упорядочения, то найдем структуру, аналогичную классификации, но только опирающуюся на одни отношения. Назовем через a отношение $A < B$, через b — отношение $A < C$, через c — отношение $A < D$ и т. д. и назовем через a' отношение $B < C$, через b' — отношение $C < D$ и т. д. Тогда будем иметь:

$$(1) a + a' = b; b + b' = c \text{ и т. д.},$$

$$(2) b - a' = a; \text{ и т. д.},$$

$$(3) a - a = 0,$$

$$(4) a + a' = a$$

и (5) неполная ассоциативность, как на странице 18.

Заметим, однако, что, если вычитание классов $A - A = 0$ дает нулевой класс, что является свойством обращения, вычитание отношений $a - a = 0$ дает разность 0, причем это вычитание не является той же самой операцией, потому что разность 0 обозначает эквивалентность. Композиция в области отношений состоит просто в чтении отношений между крайними элементами двух отрезков сопоставленных серийностей: $A(a)B + B(a')C = A(b)C$ и обратная операция перемены порядка: $A(b)C - B(a')C = A(b)C + C(a)B = A(a)B$. С этой точки зрения обратимость в действии в таких системах покоится на взаимности, а не на отрицании: вот

поэтому a — a приводит к эквивалентности, а не к нулевому отношению.

Таким образом, можно утверждать, что от 7 до 11 лет на уровне конкретных операций (элементарные сочетания классов и отношений между самими предметами путем противопоставления словесных выражений действию) структуры классов зависят от обращений (алгебраические структуры), а структуры отношений — от взаимности (структуры порядка). Но существуют ли эти два типа структур в своем первоначальном периоде без связи между собою или, наоборот, можно указать некоторую связь, существующую между обеими системами?

С точки зрения психологии мыслительных операций, оставляя в стороне случайную закономерность первоначальных операторных систем, необходимо сделать существенное замечание: если опираться на известное различие между объемом и содержанием понятия, то, естественно, нужно принять (с чем согласен весь мир), что объем понятия определяется системами классов, в которых имеет место обращение, приводящее к алгебраическим структурам, тогда как содержание понятия всегда определяется системами отношений (что не всегда замечается). Все свойства, включенные в содержание понятия, определяются суждениями, по внешнему виду безусловными (деревья суть «деревянные», трава есть «зеленая» и т. д.) или вполне очевидными отношениями (рожденные прежде старшие рожденных после и т. д.). Отсюда ясно, что о сказуемых первого типа возможно мыслить лишь в терминах отношений: «зеленый» означает или качество более или менее серийное — континуум цветов от желтого или голубого к зеленому, или качество, общее различным предметам: «зеленый» есть, таким образом, психологическое отношение асимметричное или симметричное в зависимости от контекста.

С этой точки зрения между структурами классов, основанных на обратимости, и структурами отношений, основанных на взаимности, существует тесная связь, обусловленная связью между объемом и содержанием понятий.

Вот поэтому четыре основных условия группы, которые мы могли различить в структурах классов на уровне конкретных операций (группы аддитивные и мультипликативные и в формах взаимно однозначного или однозначного его соответствия), соответствуют поочередно четырем элементарным условиям отношений. Другими словами, одни и те же совокупности элементов могут быть образованы в структуры или по форме классов, или по форме отношений, что обеспечивает психологическую общность системы. Но с точки зрения операторной структуры на уровне конкретных операций не существует структур, которые соединяли бы все эти свойства в одну и ту же систему преобразований и которые таким образом обеспечивали бы синтез обратимости и взаимности.

Этот синтез двух фундаментальных форм обратимости осуществится только на последнем этапе равновесия в развитии логичес-

ких операций, т. е., другими словами, в стадии операций над суждениями, о которых мы будем говорить ниже, в главе VI.

V.

Если алгебраические структуры и структуры порядка кажутся глубоко укоренившимися в психологическую деятельность умственных операций, можно ли то же самое сказать о структурах топологических?

Особенно интересно по этому поводу констатировать, что порядок формирования геометрических понятий и операций в самостоятельном развитии ребенка¹ абсолютно не соответствует историческому порядку этапов геометрии и больше приближается к порядку преемственности основных групп, с которыми связаны различные виды пространств. Исторически метрическая евклидова геометрия опередила на несколько веков проективную геометрию, а топология получила свою самостоятельность в эпоху еще более позднюю. С точки зрения основных групп, наоборот, топология является первой, а за ней уже идет метрическая евклидова геометрия (как переход к общей геометрии) и геометрия проективная (эта последняя присоединяется к евклидовой метрике посредством связывающих звеньев — аффинной геометрии и геометрии подобия). И вот, хотя ребенок и не отходит, естественно, от топологических главных схем (потому, что его топологические интуиции зависят от определенных перспективных условий, быстро заключаемых в структуры по евклидову методу)², не менее удивительно, что при первых попытках рисования ребенок не различает квадратов, окружностей, треугольников и других метрических фигур, но прекрасно различает фигуры открытые и замкнутые, положение «вне» или «внутри» по отношению к границе (включая сюда и положение «на границе»), разделение и соседство (не различая расстояния) и т. д.

Исходя, таким образом, от интуиции фундаментальной топологии, он ориентируется в дальнейшем в направлении проективных структур и структур метрических.

С чисто операторной точки зрения наряду с операциями над классами и отношениями, которые одни составляют логические операции действия на уровне конкретных операций, надо различать те, которые мы называем «операциями инфралоогическими». В то время как логическая операция исходит от индивидуального объекта и, расширяясь, примыкает к классам, независимым от пространственных конфигураций составляющих их элементов, операция инфралоогическая, наоборот, расчленяет предмет, взятый в отдельности, или его заново составляет по отношению к его элементам. Этот метод композиции отличается от предыдущего введением

¹ Под «самостоятельным» здесь подразумевается развитие, независимое от школьного преподавания, но не от влияния социальной среды вообще.

² Но нужно было бы иметь возможность изучить пространство восприятия с первых недель.

континуума и конфигураций. Отличные по их структуре от логических операций, операции инфралоогические не предшествуют им во времени. На уровне дооперативном нет никакой разницы между первыми инфралоогическими и первыми логическими интуициями, тогда как на уровне конкретных операций оба вида структур образуются параллельно. Интересно отметить этот параллелизм на уровне первых операторных структур, потому что, как бы ни были скромно и незаметно построены элементарные формы операторных организаций, можно там распознать корни этого родства или, вернее, глубокой взаимодополнительности между топологическими структурами и структурами алгебраическими, которая стала очевидной лишь благодаря последним открытиям в топологии¹.

VI.

Не будет преувеличением утверждать, что операторные структуры мышления, формируясь, выявляют с самого начала наличие трех больших типов систем, соответствующих в математике алгебраическим структурам, структурам порядка и структурам топологическим. Отметим, между прочим, что очень скоро материнские структуры координируются между собою и порождают посредством межструктурных композиций определенные, более поздние структуры, значение которых будет не менее важным для конструкции логических и математических понятий.

На уровне конкретных операций, связанных с действиями над предметами и заключающими только определенные операции над классами и отношениями (элементарные «группировки»), не существует еще никаких структурных ансамблей, которые соединяли бы в одну и ту же систему преобразований чистые обращения в алгебраические структуры и чистые взаимности в структуры порядка. Но к 11—12 годам в среднем к этим конкретным операциям прибавляется совокупность новых операций, опирающихся на этот раз на предложения, а не на предметы, и эти операции над суждениями составляют тогда двойную структуру групп и сеток, причем каждый из этих двух аспектов привлекает в свою очередь чистое обращение в алгебраические структуры и чистую взаимность в структуры порядка.

Группа, которая теперь начинает действовать, содержит четыре преобразования (группа Клейна), которые можно определить следующим образом в операциях над предложениями:

(1) **Обращение**, или отрицание, N операции есть ее дополнение в базовой совокупности, например:

$$N(p \vee q) = \overline{p \vee q} = (\overline{p} \cdot \overline{q}) \text{ или } N(p \supset q) = \overline{(p \supset q)} = (p \cdot \overline{q}).$$

¹ Ср. работы Понтрягина в изложении Б. Экмана (Topologie und Algebra Viertel. d. Naturf. Zürich, 1944, p. 26) в смысле «взаимодополнительности» между понятиями топологическими и алгебраическими.

(2) **Взаимность** R операции есть та же операция, но между отрицательными предложениями, например:

$$R(p \vee q) = (\bar{p} \vee \bar{q}) = (p/q) \text{ или } R(p \supset q) = (\bar{p} \supset \bar{q}) = (q \supset p). [9]$$

Отметим, что взаимность возвращает опять к перемене порядка терминов включения, что имеет общее значение, потому что вся операция над суждениями может принять вид включения.

Пример:

$$(p \vee q) = (\bar{p} \supset q) \text{ или } R(\bar{p} \supset q) = (q \supset \bar{p}) = (p/q).$$

(3) **Корреляция** C операции есть результат замены (\vee) и (\cdot) в нормальной форме этой операции. Например,

$$C(p \vee q) = (p \vee q) \cdot (p \vee \bar{q}) = (\bar{p} \vee q) = (p \cdot q).$$

$$C(p \supset q) = (p \vee q) \cdot (\bar{p} \vee q) \cdot (\bar{p} \vee \bar{q}) = (\bar{p} \cdot q).$$

(4) **Тождественное преобразование** I оставляет операцию неизменной. Имеем коммутативную группу:

$$NR = C; \quad NC = R; \quad RC = N; \quad NRC = I.$$

Например, в случае $p \supset q$ имеем:

$$N(q \supset p) = (\bar{p} \cdot q) = C(p \supset q) \text{ будет } NR = C,$$

$$N(\bar{p} \cdot q) = (q \supset p) = R(p \supset q) \text{ будет } NC = R,$$

$$R(\bar{p} \cdot q) = (p \cdot \bar{q}) = N(p \supset q) \text{ будет } RC = N,$$

$$R(\bar{p} \cdot q) = (p \cdot \bar{q}) \text{ и } N(p \cdot \bar{q}) = (p \supset q) \text{ будет } NRC = I.$$

Таким же образом поступаем с тройничными операциями и т. д.¹ В определенных случаях (диагонали двойничных, тройничных и т. д. операций в таблице) имеем: $R = N$ и $C = I$ или $R = I$ и $C = N$, но обращение N , естественно, всегда отличается от I .

Констатируем, что эта группа $INRC$, которая составляет алгебраическую структуру, все же заключает в себе взаимности, которые составляют обратимую форму структур порядка. Психологически эта группа осуществляет одновременно синтез и форму конечного равновесия двух операторных структур, до этих пор различных и основанных одна — на обращении, другая — на взаимности.

Но система операций над суждениями составляет в то же время сетку: вся совокупность операций предполагает внутреннюю границу, определяемую их общей частью (\cdot) , например $(p = q) \times (p \vee q) = (p \cdot q)$, и внешнюю границу, определяемую их объединением (\vee) , например $(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) = (p = q)$. Только из того факта, что эта сетка дополнительна, она допускает операции обращения. Между прочим, и это важно подчеркнуть, две данные операции, их внутренняя граница ($=BJ$) и внешняя граница ($=BS$) вместе составляют группу, которая не является группой $INRC$, но ко-

¹ См. Пиаже «Очерки о преобразованиях логических операций», Париж, 1952. Piaget, Essai sur les transformations des opérations logiques, Paris (PUF), 1952.

торая ей изоморфна и состоит из преобразований, которые мы назовем Ia, Na, Ra, Ca и которые определим следующим образом.

Дана двухчленная операция $p \vee q$. Ее можно рассматривать как состоящую из двух единичных операций p и q , связанных составляющей операцией (\vee) . Рассмотрим также трехчленную операцию:

$$(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot r) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot r) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot \bar{r}) = [(q \supset p) \cdot (p \supset r)],$$

которую можно рассматривать как состоящую из двух двойных операций $(q \supset p)$ и $(p \supset r)$, связанных составляющими операциями (\cdot) . Мы назовем тогда Ia, Na, Ra и Ca преобразования J, N, R и C , связанные с составляющей операцией. Если теперь мы назовем x и y две какие-то операции сетки, BJ — их внутреннюю границу и BS — их внешнюю границу, то будем иметь группу¹:

$$(Ia) x \cdot y (= BJ) \text{ и } (Ia) x \vee y (= BS),$$

$$(Na) x/y = \bar{x} \vee \bar{y} \quad (Na) \bar{x} \cdot \bar{y},$$

$$(Ra) \bar{x} \cdot \bar{y} \quad (Ra) x/y = \bar{x} \vee \bar{y},$$

$$(Ca) x \vee y (= BS) \quad (Ca) x \cdot y (= BJ),$$

тогда имеем:

$$Ca(BJ) = BS \text{ и } Ca(BS) = BJ.$$

Дальше имеем:

$$Na(BJ) = Ra(BS) \text{ и } Na(BS) = Ra(BJ).$$

И все обычные преобразования группы:

$$Na(x \cdot y) = Ra Ca(x \cdot y); \quad Na Ra Ca(x \cdot y) = (x \cdot y) = x \cdot y \text{ и т. д.}$$

Другими словами, если группа $INRC$ включает взаимность, то сетка операций над суждениями включает обращение и допускает структуру группы для фундаментальных отношений между границами и операциями, которые они соединяют.

Итак, с точки зрения генетической эта двойная структура группы и сетки, которую составляют операции над суждениями, есть только присоединение элементарных структур к группировкам, которые, как мы видели, представляют несовершенные группы, группы неассоциативные целые и полусетки.

Переход от группы классов и отношений к структуре группы и сетки операций над суждениями может действительно рассматриваться как результат обратимости комбинаторных операций,

¹ См. Пиаже «Очерк о преобразованиях логических операций», стр. 159, Piaget. Essai sur les transformations des opérations logiques (теорема 247. См. также следующие теоремы и теорему 263).

замещаемых в операциях просто аддитивных или мультипликативных. Другими словами, в простых включениях, классификациях и т. д. сетка представляет собою «совокупность частей» путем комбинирования n с n этих частей между собою. Но такая комбинаторная композиция сама порождает классификацию: совокупность частей, которые составляют двойную структуру сетки и группы, о которых идет речь, являются результатом совокупности возможных классификаций, приложенных к элементам группировки, переведенные на язык предложений.

VII.

Нам остается прийти к заключению, которое мы можем сделать либо с точки зрения общего представления математики, влияние которой должен учитывать воспитатель, хочет он этого или нет, либо с точки зрения практических применений.

Что касается первого из этих двух вопросов, то существенная проблема заключается в том, чтобы узнать: должен ли преподаватель следовать строгой логике в платоновском духе, чтобы быть на уровне современной математики, или он может рассматривать математическую мысль как продолжение непосредственных конструкций ума и таким образом исходить в преподавании и от психологии так же, как и от логики.

Если психологические данные, на которые мы опираемся, точны, то конфликт между логизмом и психологизмом кажется подлежащим некоторому ослаблению при условии все же введения некоторого числа понятий, нужных для того, чтобы отделить «психологию» от «психологизма» и «логику» от «логизма».

«Психологизм» есть попытка основать логику на психологических законах: «Для психологии, — сказал Л. Апостел, — логические законы суть законы психологические, и они описывают реальные умозаклучения или как наиболее частые, или как наиболее нормальные, или как наиболее легко осуществимые практически»¹. Проще говоря, психологизм есть метод применения психологии в области, где она уже не компетентна, потому что психологические законы опираются на констатацию фактов, а законы логики управляют нормативными или дедуктивными необходимостями.

Обратно, «логизм» есть вторжение размышлений логика в область фактов. Он состоит, например, в утверждении, что ум конкретного индивидуума (касается ли это самих ученых или школьников, начинающих изучать математику) достигает логической строгости только следуя определенным этапам: понимание сущностей, подчинение индивидуума правилам языка, усвоенным извне, и т. д., и т. д.

¹ Л. Апостел, Логика и доказательство. Методы, т. 5 (1953), стр. 303. L. Apostel. Logique et preuve, Methodos, vol. 5 (1953), p. 303.

Если мы предоставим психологии заботу изучать факты, а логике — анализировать основания, получится то, что эти две науки будут иметь между собою больше контактов, чем при помощи философских «измов», в которых их хотели согласовать. Эти контакты полезны воспитателю более, чем посторонние доктринерские противодействия на той же ступени тех же самых наук.

Психология действительно протягивает руку логике в том, что ум непосредственно ориентирован на организацию определенных операторных структур, изоморфным таким же или некоторым частям математических структур, которые математики кладут в начало их конструкций или которые логики находят в системах, перерабатываемых ими. Но этот частный изоморфизм не означает, что логические правила суть законы мысли. Структуры совокупностей, на которые ориентируется ум в процессе своего развития, не соответствуют ни направляющим структурам (или имеющих форму *a priori*), ни структурам физическим, полученным эмпирически: это суть только законы равновесия под формой систем возможных операций, из которых лишь некоторые активизируются в функции окружающих физических или социальных условий. Это те возможности, которыми располагает логика для изучения извне полных совокупностей, свободно снабжая их основами, которыми она располагает: это не значит, что мы хотим сохранить пункты трения между дедуктивным анализом, с одной стороны, а с другой — экспериментальными определениями возможностей или невозможностей, которыми характеризуются формы равновесия, ответственные различным уровням организации ума. Без сомнения, алгебраическая техника логиста в психологии может быть и полезной при описании форм равновесия и структур, но это не значит, что можно без церемоний прилагать законы логики к законам мысли.

Что же касается того, будет ли логик искать некоторых контактов с психологией, то история будущих исследований ответит нам на этот вопрос. Некоторые логики продолжают относиться недоверчиво к психологизму в целом, как например наш друг Бет, который в своей интересной главе уточнит свои позиции. Зададим еще вопрос: «Лежит ли боязнь психологизма в основе самой логики, или же она заключается в зачатках логизма, бессознательно ведущего логика к выбору в психологической области одной концепции преимущественно перед другой тем же методом, которым индивидуум приходит к достижению логических связей?». Некоторые логики, как Апостел, отмечают различие между традиционным психологизмом и другими более тонкими средствами психологии: «...мы не утверждаем, как психологи XIX века (Зигварт, Гейман, Вундт, Эрдман), что логические законы суть законы мысли. Мы только говорим, что существуют такие законы мысли, что в известной социальной структуре и для индивидуумов, обладающих определенными

качествами, мы можем обязательно (с физической необходимостью) заставить их признать наши заключения, если они признали наши посылки, лишь бы мы производили определенные операции, подчиненные на всех этапах правилам корректного доказательства»¹.

В общем, весьма возможно, что актуальные работы об отношениях между логикой и языком кончаются признанием того, что сам язык проникает своими корнями в области, где его структуры отражают структуры логики в операторных системах более глубоких, чем связи, существующие между одними только вербальными символами.

Коротко — будущее взаимоотношений между психологией и логикой остается широко открытым и не будет зависеть от предвзятых мнений прошлого. С практической точки зрения для воспитателя не стоит вопрос о выборе между методом формальным, основанным на логике, и методом активным, основанным на психологии: цель преподавания математики остается все время в достижении логической строгости и точно так же — в достаточном понимании формальной стороны математики. Но только одна психология способна снабдить педагогов такими данными, чтобы и эта строгость и этот формализм были бы обязательно достигнуты. Нельзя считать доказанным, что, пользуясь с самого начала формальным методом, мы не придем в конце концов к псевдоформализму или к скороспелому словесному формализму, и в этом заключается опасность применения метода, пренебрегающего законами умственного развития.

В действительности, если здание математики покоится на «структурах», которые соответствуют существующим структурам мышления, то дидактическую математику нужно основывать только на прогрессивной организации операторных структур. Психологически операции происходят от действий, которые, самоуглубляясь, координируются в структуры. Напрасно думать, что обращение к начальным действиям компрометирует высшую строгость и поощряет эмпиризм. Эмпиризм получается тогда, когда воспитатель заменяет математическое доказательство физическим экспериментом с простым запоминанием полученных результатов. Но как только эксперимент служит средством координации действий, то абстракция переносится на сами эти действия, а не на предмет эксперимента, подготавливая ум к дедукции, а не противодействуя

¹ Л. Апостел, *Логика и доказательство. Методы*, т. 5 (1953), стр. 305. Таким образом, позиция Апостела состоит в признании «существования психосоциальных и логических операций» (стр. 305), чем определяется область сотрудничества, в которой работы психологов нельзя признать не существующими, как он предполагает.

Трудность для психолога заключается в допущении «физической необходимости», отличной от необходимости психической, если это понятие не приводится в конечном счете к тому, что называется законом равновесия (согласно гештальттеории). [10]

ей¹. Если все знание ребенка предполагает эксперимент для своего осуществления, то это психологическое утверждение не оправдывает эмпиризма, потому что существуют две формы эксперимента: эксперимент физический, ведущий к абстракции свойств, взятых от самих предметов, и эксперимент логико-математический с абстракцией по отношению к действиям или операциям, осуществляемым над предметами, а не по отношению к самому предмету, как он есть. Таким образом, обращение к эксперименту и действию и в общем смысле так называемая активная педагогика не компрометирует ни в чем высшую дедуктивную строгость, но, наоборот, подготавливает ее, создавая ей реальную, а не только вербальную базу.

¹ Например, в экспериментах порядка (порядок прямой, порядок обратный, образуемый противоположным движением или вращением и т. д.) ребенок абстрагирует порядок не предметов, как таковых, но действия и операции, благодаря которым они возникли. Его понимание будет, естественно, настолько лучшим, насколько активным он будет в действии, не ограничиваясь только пассивным созерцанием результатов действий, выполняемых другими.

РАЗМЫШЛЕНИЯ ОБ ОРГАНИЗАЦИИ И МЕТОДЕ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ.

Эварт Бет.

I. Соотношения между программами преподавания в высшей и средней школах.

Проблемы, которые нас занимают, очень сложны, и дискуссия о них может нас увлечь в рассмотрение деталей школьной организации, которая к тому же в разных странах очень различна; попытка объяснить это различие привела бы нас к очень углубленным работам в области истории, социологии и политики.

Позвольте же мне применить здесь аксиоматический метод и исходить от определенного числа основных постулатов.

1. Всякая высшая школа имеет одной из своих целей подготовить учеников, называемых студентами, разрешать самостоятельно вопросы, принадлежащие одной или нескольким областям специальных наук, и приложить результаты к разрешению определенных практических проблем; в частности, имеются такие институты, которые готовят студентов к самостоятельному решению математических вопросов и применению их к разрешению проблем, поставленных преподаванием математики.

2. Каждая средняя школа имеет своей целью, между прочим, подготовить будущих студентов.

3. Преподаватели средних школ получают свое образование в высшей школе.

4. Математика составляет часть нормальной программы средних учебных заведений.

Эти постулаты определяют в то же время и употребление таких терминов: **школа высшая (или средняя), преподаватель, ученик и студент**, не зависящих от деталей школьной организации.

Из наших постулатов вытекает, что можно предвидеть довольно глубокую взаимосвязь между программами математики обоих типов школ. С одной стороны, программа преподавания средней школы должна обеспечить надлежащую подготовку будущих студентов, которым нужно приспособляться к преподаванию в высшей школе; с другой стороны, эта последняя должна считаться с тем фактом, что сегодняшние студенты могут стать преподавателями завтра. Отметим факт, о котором очень часто забывают, — программа преподавания должна быть способной не только заинтере-

совать учеников, но также вдохновить учителя; очевидно, что подготовка преподавания оказывает влияние на метод, которым эта программа вводится в действие.

Если имеется сильная двойная тенденция к сближению этих двух программ преподавания, то имеется также двойная тенденция антагонизма между ними; тот факт, что преподавание в средней школе имеет дело с учениками еще очень молодыми, среди которых только меньшинство одарено особенными способностями к изучению математики, обуславливает довольно строгие ограничения по отношению к программам преподавания в этой школе. В то же самое время непрерывный прогресс математических исследований обуславливает быструю эволюцию программ преподавания в высшей школе.

Развитие математики в течение XIX века и все более и более определенная тенденция беречь, щадить учеников в преподавании в средней школе одинаково разрушили взаимосвязь и так уже не прочную обеих программ.

Увеличивающаяся роль анализа, введение методов рассуждения все более и более сложных и отвлеченных и все увеличивающиеся требования строгости в математике, вытекающие из применения этих методов, породили между двумя программами бездну, кажущуюся непреодолимой. С одной стороны, элементарная математика — предмет, преимущественно изучаемый в средней школе, кажется, потерявший всякий научный интерес, с другой стороны, сложность теорий, установленных новейшими открытиями, не дает возможности перенесения их в программы средней школы.

II. Влияние идей Ф. Клейна.

В своем знаменитом курсе «Элементарная геометрия с точки зрения высшей» и в своих попытках реформы преподавания в средней школе Клейн старался перебросить мост между обеими программами. Все же идеи Клейна, вопреки их полезному влиянию, не послужили полному обновлению программ, как на это можно было надеяться. Они произвели реформу скорее в методах преподавания, чем в самих программах. Упомянем все же новую программу, установленную в Pays — Bas в 1937 году в серии докладов, публикуемых инспекторской комиссией по реформе преподавания математики, начало которой было положено в 1925 году под председательством Н.Ж.Е. Beth. Нетрудно объяснить, почему усилия Клейна привели только к частичным результатам. Этот неуспех заключался в том, что геометрические теории, возглавляемые Клейном, хотя они и занимали промежуточную позицию между программами средней и высшей школ, оставались все же далекими от основных интересов как тех, так и других. Однако прогресс исследований продолжался и тогда, когда анализ развернул свою деятельность в самых различных областях, и скромное место, которое некогда занимала элементарная геометрия, рас-

сма­три­вае­мая с вы­шей точки зре­ния Клей­на, пре­об­ра­зи­лось в огром­ную об­ласть ин­тел­лек­ту­аль­но­го ми­ра — об­ласть от­кры­тия ал­ге­браи­че­ских струк­тур, ко­то­рые при­об­ре­ли не­ожиданно боль­шое зна­че­ние для ма­те­ма­ти­ки в це­лом. В то же время ис­сле­до­ва­ния в об­ла­сти обос­но­ва­ний, ко­то­рые ве­дут свое на­ча­ло ско­рее от про­блем фи­ло­со­фских, сде­ла­лись ис­точ­ни­ком от­кры­тий для боль­шин­ства ма­те­ма­ти­ков на­ших дней. Раз­ви­тие этих новых ис­сле­до­ва­ний име­ет, по моему мнени­ю, боль­шое зна­че­ние для сбли­же­ния об­еих про­грамм обу­че­ния. Кон­ста­та­ция это­го фак­та не долж­на пугать чи­та­те­ля: дей­стви­тель­но, речь идет не о том, что­бы вве­сти изу­че­ние ал­ге­браи­че­ских струк­тур или ос­нов ма­те­ма­ти­ки в про­грам­мы сред­них школ. Я хо­чу толь­ко под­черк­нуть важ­ность раз­ви­тия об­шир­но­го по­ля изу­че­ния, ко­то­рое име­ет боль­шое зна­че­ние и для уг­луб­ле­ния пред­ме­тов, со­став­ляю­щих со­дер­жа­ние дей­ствую­щей про­грам­мы сред­ней школы, и для по­ни­ма­ния опре­делен­ных труд­но­стей, ко­то­рые обыкно­венно испы­ты­ва­ют учени­ки.

III. Пояснения.

Я хо­чу ска­зать не­сколь­ко слов о пе­ре­хо­де от си­сте­мы F ра­цио­наль­ных чисел к си­сте­ме R чисел дей­стви­тель­ных. Для об­лег­че­ния во­про­са я бу­ду име­ть де­ло толь­ко с обыкно­вым по­ря­дком в этих двух со­во­куп­но­стях и обой­ду мол­ча­нием ариф­ме­ти­че­ские опе­ра­ции¹.

1. Рас­смот­рим вна­ча­ле спо­соб пе­ре­хо­да от струк­ту­ры $[F, <]$ к струк­ту­ре $[R, <]$. На­зо­ве­м **сече­нием** вся­кую дан­ную па­ру (A, B) под­мно­жеств A и B от F , удо­вле­тво­ряю­щих сле­ду­ю­щим усло­ви­ям: (i) име­ется эле­мент x в A и эле­мент y в B ; (ij) каж­дый эле­мент из F есть в A или в B ; (iij) для каж­до­го x в A и для каж­до­го y в B име­ем: $x < y$.

Для не­ко­то­ро­го сече­ния (A, B) мо­гут име­ть ме­сто три сле­ду­ю­щих слу­чая: (i) име­ется наи­боль­ший эле­мент x в A ; (ij) име­ется наи­мень­ший эле­мент y в B ; (iij) не име­ется наи­боль­ше­го эле­мен­та в A , ни наи­мень­ше­го эле­мен­та в B .

Тот факт, что слу­чай (iij) мо­жет име­ть ме­сто, по­ка­зы­ва­ет, что си­сте­ма $[F, <]$ при кажущейся не­прерыв­но­сти име­ет про­бе­лы.

2. Эти про­бе­лы за­пол­ня­ют­ся при по­мо­щи из­вест­но­го ме­то­да Де­де­кин­да. На­зо­ве­м **эк­ви­ва­лент­ны­ми** два сече­ния (A, B) и (A', B') та­ко­го ро­да, что име­ется не более од­но­го эле­мен­та x из F , ко­то­рый бу­дет в A и в B' или в A' и в B . Пусть $[A, B]$ — мно­же­ство сече­ний (x, y) , ко­то­рые эк­ви­ва­лент­ны дан­но­му сече­нию (A, B) ; тогда, что­бы $[A, B] = [C, D]$, необ­хо­ди­мо и дос­та­точ­но, что­бы (A, B) бы­ло эк­ви­ва­лент­но (C, D) . Го­во­рят, что $[A, B] < [C, D]$, если B и C име­ют по край­ней ме­ре два об­щих эле­мен­та.

¹ Для более де­таль­но­го изу­че­ния мож­но об­ра­тить­ся к моим «Ос­но­вам ло­ги­ки и ма­те­ма­ти­ки», 2-е изд., Па­риж, 1955. E. W. Beth, *Fondaments logiques des mathématiques*, 2-е ed., Pa­риж, 1955.

Пусть R — совокупность всех действительных чисел $[A, B]$; известно, что $[R, <]$ представляет непрерывный порядок без пробелов.

3. Теперь мы хотим показать разницу между двумя структурами $[F, <]$ и $[R, <]$. Для наибольшей степени точности применим методы символической логики в форме, подходящей для наших целей.

Введем переменные x, y, z, \dots , элементарные выражения $x = x, x = y, x = z, \dots, y = x, y = y, \dots, z = x, \dots, x < x, x < y, \dots, y < x, \dots$, и операторы — («нет»), \vee («или»), $\&$ («и»), \rightarrow («если..., то...»), $(x), (y), (z), \dots$ («для всякого x , для всякого y , для всякого z ») и $(Ex), (Ey), (Ez), \dots$ («имеется x такой, что..., имеется y такой, что..., имеется z такой, что...»).

Выражения **замкнутые** (не содержащие ни одной переменной, которая не была бы связана с соответствующим квантором) представляют собою утверждение, выражающее характерное свойство упорядоченных структур, которые мы рассматриваем.

Например, выражение

$$(x)(y)[x < y \rightarrow (Ez)\{x < z \cdot \& \cdot z < y\}]$$

(«для всякого x и всякого y при $x < y$ имеется z такое, что $x < z$ и $z < y$ ») является истинным для обеих структур $[F, <]$ и $[R, <]$, выражение $(Ex)(y)[x = y \vee \cdot x < y]$ («имеется x такой, что для всякого y имеем $x \leq y$ ») не будет истинным ни для той, ни для другой. Чтобы определить разницу между двумя структурами, нужно найти замкнутое выражение, которое, будучи истинным для одной, было бы не верно для другой.

4. Отыскание этого выражения было облегчено тем, что в 1927 г. Лангфорд дал решение проблемы для структуры $[F, <]$, т. е., другими словами, он установил метод, позволяющий для всякого данного замкнутого выражения разрешить вопрос, является ли оно истинным для данной структуры, или нет. Вместо того чтобы дать общее описание этого метода, я покажу применение его на частном случае следующего выражения:

$$(Ex)(Ey)[x < y \cdot \& \cdot (z)\{z < y \cdot \rightarrow z < x\}].$$

Вначале мы рассмотрим, в частности, выражение

$$(z)[z < y \cdot \rightarrow \cdot z < x]$$

или лучше его отрицание

$$(Ez)[z < y \cdot \& \cdot \overline{z < x}],$$

которое допускает следующее сокращение (нетрудно убедиться в правильности следующих преобразований):

$$(Ez)[z < y \cdot \& \cdot \{x = z \cdot \vee \cdot x < z\}]$$

$$(Ez)[\{z < y \cdot \& \cdot x = z\} \vee \{z < y \cdot \& \cdot x < z\}]$$

$$(Ez) [z < y \cdot \& \cdot x = z] \vee (Ez) [z < y \cdot \& \cdot x < z]$$

$$x < y \cdot \vee \cdot x < y$$

$$x < y.$$

Наше начальное выражение эквивалентно:

$$(Ex)(Ey) [x < y \cdot \& \cdot \overline{x < y}]$$

Выражение, очевидно, не истинно.

Теперь мы можем сделать интересное наблюдение, что наш метод решения остается действительным, если мы заменим структуру $[F, <]$ структурой $[R, <]$, т. е. что нельзя иметь никакого замкнутого выражения, которое, будучи истинным по отношению к одной из этих структур, не будет истинным и ко второй¹.

5. Эти заключения, кажущиеся невероятными на первый взгляд, легко объяснимы: неразрешимость, которая встает перед нами при отыскании различия между структурами $[F, <]$ и $[R, <]$, происходит от того, что мы имеем в своем распоряжении очень ограниченные средства выражения.

Чтобы прийти к желаемому построению, надо расширить нашу слишком узкую систему. Мы можем, например, ввести наряду с индивидуальными переменными x, y, z, \dots переменные множества X, Y, Z, \dots и наряду с элементарными выражениями $x = x, x = y, \dots, y = x, \dots, x < x, \dots$, элементарные выражения $X(x), X(y), \dots, Y(x), \dots, Y(y), \dots$, (« x есть в X », « y есть в X », ..., « x есть в Y », ...) тогда, между прочим, понадобится введение кванторов $(X), (Y), \dots, (EX), (EY), \dots$, соответствующих переменным.

В формальной системе, расширенной подобным образом, может быть выражена аксиома непрерывности Дедекинда, которая действительна для структуры $[R, <]$, но не для структуры $[F, <]$; отсюда следует, что метод решения, найденный Лангфордом, не применим к выражениям расширенной системы.

6. Педагогические следствия нашего исследования сводятся к двум проблемам, довольно трудно разрешимым:

а) Как объяснить ученикам переход от структуры $[F, <]$ к структуре $[R, <]$?

б) Как объяснить им соответственные свойства этих двух структур?

Здесь уместно одно замечание. Проблема а) не вставала бы перед нами, если бы включили в программы по алгебре и по алгебраическому анализу аксиоматический метод вместо метода генетического, который состоит в последовательном построении систем чисел целых, рациональных, действительных и комплексных,

¹ А. Тарский показал, что это выражение остается справедливым и при сложении и умножении, лишь бы только совокупность F рациональных чисел была бы замещена совокупностью F алгебраических действительных чисел.

исходя от системы натуральных чисел. Здесь на нас оказывает излишнее влияние историческое развитие. Но проблему б) мы не можем обойти, если мы хотим достичь необходимого уровня математической строгости при изложении теории пределов.

Мы приходим к выводу, что невозможно определить разницу между структурами $[F, <]$ и $[R, <]$, если мы остаемся в области элементарной логики, т. е., другими словами, если будем избегать всякого обращения к понятиям теории множеств. Если мы хотим объяснить взаимные свойства наших двух структур, мы вынуждены будем выйти из области элементарной логики. Подчеркнем, что здесь мы совершенно не имеем в виду достичь уровня строгости, которая была бы недоступна для учеников. Но даже если мы решимся на то, чтобы использовать не вполне точные средства выражения, все же нам придется выйти за границы элементарной логики, чтобы выразить или подсказать, в чем состоит разница между двумя структурами. Предыдущий обзор объясняет трудности, которые ученик должен испытывать, чтобы понять взаимные свойства структур $[F, <]$ и $[R, <]$. Математика в программах средних школ принадлежит почти целиком области элементарной логики. В этой области ученик чувствует себя, так сказать, как дома; вполне понятно, что он испытывает очень большие затруднения, если его принуждают выйти за границы этой знакомой ему области.

IV. Логика и психология,

Наши тезисы, согласно которым педагогика математики выдвигает определенные проблемы, которые могут быть разрешены скорее с помощью логики, чем психологии, заставляют нас усилить взаимосвязь между этими двумя дисциплинами, т. е. математикой и логикой.

Кризис основ науки, который мы можем отнести к эпохе между 1890 и 1910 гг. [12] породил немедленный эффект, заставив как математиков, так и психологов почувствовать настоятельную необходимость найти определенную точку зрения, позволяющую им ориентироваться в хаотической области, которую представляли собою математические науки. Такую точку зрения нельзя было найти внутри области математики и потому вполне понятно, что было решено ее искать **вне**. Большинство исследователей были согласны найти в логике достаточную базу для всего здания математики; но вскоре основы логики были признаны так же мало солидными, как и основы математики. [13]

Вследствие этого решено было искать основы за границами формальных наук и прибегнуть к реальным наукам, чтобы найти надежное основание и для логики и для математика. С другой стороны, было очевидно, что и естественные науки не могли никогда предоставить этой базы. Их неспособность в этом отношении была выявлена в дискуссиях по основаниям геометрии, вы-

званных открытием неевклидовой геометрии. Это открытие было тем более убедительным, что геометрия по распространенному убеждению занимала промежуточное положение между чистой математикой и естественными науками.

Поэтому вполне естественно, что обратились к психологии, которая в этот период быстро выдвинулась вперед в своем развитии. С одной стороны, дискуссии об основаниях геометрии уже создали контакт между психологией и отысканием фундаментальных оснований, с другой стороны, логика обладала с незапамятных времен многочисленными связями с психологией. Было особенно важно для педагогики математики, чтобы между логикой и психологией была установлена тесная связь в отношении исследований фундаментальных основ. Действительно, сотрудничество между этими тремя областями способствовало бы, без сомнения, скорейшему разрешению практических проблем преподавания математики. Между тем надо констатировать, что психология сама по себе никогда не приближала желанного решения. В тот момент, когда многие математики хотели позаимствовать из ее источников, она отвернулась от своего традиционного интеллектуализма, чтобы посвятить себя почти исключительно изучению аффектов и подсознательного.

Со стороны же математиков, наоборот, нужда в сближении все время остро ощущалась. Положение было особенно деморализующим в отношении преподавателей средних школ. Зачем вбивать в головы учеников математику, если ее теоремы не только оказывались бесполезными с практической точки зрения, но и лишены были солидного основания? Зачем их утруждать требованиями строгости, присущей дедуктивному методу, если он не мог гарантировать точности результатов?

Настоятельная потребность найти исходную точку, отправляясь от которой можно было бы судить о проблеме оснований, дала место целой серии попыток рассматривать эту проблему, исходя от данных или понятий, заимствованных у психологии.

С некоторой осторожностью¹ мы можем сказать, что психология не способствовала выяснению проблемы оснований логики и математики. Уже Фреге горячо боролся против посредничества психологии в разрешении этой проблемы, а сегодня большинство специалистов в этой области сходятся во мнении, что надо избегать всяческого посредничества с этой стороны.

Надо точно различать проблему права и проблему факта. Единственный факт заключается в том, что до сих пор роль психологии в отыскании основ была незначительной, еще не указывает, что и в будущем она будет такой же.

¹ Мы не будем говорить отдельно о работах Г. Маннури и его школы по психолингвистическому анализу математики и о работах Ж. Пиаже о генетической эпистемологии.

Чтобы судить о возможности такого развития, надо разобрать следующие вопросы:

(i) Как объяснить тот факт, что до этого времени роль психологии не была более значительной?

(ij) Какова в принципе могла быть эта роль психологии?

Развивая (i), можно попытаться защитить следующие положения:

1. Представители современной психологии не располагают в основном математическим аппаратом, который составляет необходимое условие для всякой успешной работы по проблеме оснований.

2. Психология не достигла еще того уровня, который необходим. Ни тот, ни другой из этих ответов не кажется вполне удовлетворительным. Действительно, было бы естественным, что психолог, который хочет изучить проблему оснований, начинает с усвоения необходимого математического аппарата; между прочим, если развитие психологии не достигло еще достаточного уровня, то это скорее всего заметит психолог, и можно ожидать, что он сделает усилие, чтобы способствовать развитию психологии, а не для того, чтобы разрешить проблему, трудность которой от него ускользнет. Тем не менее часто получается впечатление, что психологи не дооценивают важность проблем как логических, так и математических, выдвинутых благодаря кризису оснований, и что они имеют преувеличенное представление о могуществе их науки по отношению к этим проблемам. Это неосознание реальности положения раздражает специалистов в отыскании оснований и заставляет их держаться на страже против всякого вторжения психологии. Из положения (ij), по моему мнению, роль психологии остается всегда очень скромной.

Конечно, проблема поисков оснований не сможет совсем избежать психологических проблем. Но исследователи всегда могут сделать так, что проблемы психологические, которые могут встретиться, будут разрешены в границах психологии в общем смысле.

Возьмем вначале очень простой пример. Чтобы иметь дело с символической логикой, надо, чтобы умели различать и узнавать символы определенного вида. Может случиться, что логик совершит ошибки, потому что он не сможет различить символы определенной формы. Этот логик может случайно явиться патологическим примером для психоаналиста, который сумеет ему показать или, еще лучше, заставить его самого увидеть глубокие причины его ошибки. Такой метод, в лучшем случае, способен помочь психическому выздоровлению нашего логика, но в своей логической работе этот последний может развиваться вполне самостоятельно, заменяя в данной проблеме символы новыми разнообразными символами.

С общей точки зрения психолог будет стремиться открыть подлинный аппарат мысли. Логик будет поступать так, как будто

он не знает деталей этого механизма. Действительно, самонаблюдения, разговоры со своими собратиями, а в особенности история логики и математики, будут к его услугам для того, чтобы показать, насколько полон этот механизм и как разнообразны его функции. Так же и логическая теория, объясняющая наше знание этого механизма, никогда не достигнет строгости и общего характера, который все же необходим.

Искусство, которое позволит логике обойтись совершенно без привлечения нашего сознания к механизму мысли, есть, как известно, формализация. Не удивительно поэтому, что взгляды логиков и психологов на этот предмет сильно отличаются друг от друга. Для логиков еще можно допустить их незнания механизма мысли, но для психологов незнание этого механизма является непростительным недостатком.

V. Роль математической подготовки.

Эта дискуссия заставляет нас остерегаться тенденции преувеличения компетенции психологии по отношению к проблемам педагогики математики.

Действительно, для математика проблема педагогики представляется совсем иначе, чем в других предметах преподавания в средних школах. Там имеет место главным образом необходимость объяснить ученикам известные факты или заставить их понять известные правила или отношения; следовательно, психология может оказать там драгоценную услугу, научив нас, как нам сделать, чтобы эти факты были бы легко усвоены и чтобы эти правила и эти отношения были бы легко поняты.

Роль математического образования в преподавании средних школ состоит почти исключительно, как мне кажется, в усвоении учащимися дедуктивного метода.

Таким образом, преувеличенное значение, присваиваемое данным психологии, может оказать только нежелательное влияние.

Под предлогом того, что ученики на первых годах обучения не являются достаточно зрелыми, чтобы понимать дедуктивный метод, приходят к необходимости обучать их геометрическим теоремам эмпирическим методом.

Обойдем молчанием вопрос о зрелости; если даже ученики первых лет обучения не достигли еще соответственного уровня, это вовсе не оправдывает введение упомянутого метода. Действительно, если бы вопрос касался только обучения учеников известному числу геометрических теорем, всегда было бы предпочтительнее представить их в догматической форме. Факт применения эмпирического метода показывает, что имеет место плохое понимание, если чувствуется необходимость убедить учеников очевидностью теорем, т. е. другим путем, чем путем дедукции, но мне кажется исключительным заблуждением применять в этом случае метод, который не выдерживает никакой критики.

VI. Психолингвистика и генетическая эпистемология.

Мне осталось сказать только несколько слов об идеях Маннури и Пиаже. Психолингвистика Маннури отличается от форм психологизма, о котором мы уже говорили, тем, что она исходит от исследования проблем оснований. Это объясняется тем, что Маннури был уже математиком, прежде чем сделаться психологом. Психолингвистика есть, конечно, результат довольно сложного развития. После применения психологических методов к изучению оснований Маннури искал применения этих методов философской критики к проблемам, выдвинутым другими науками. Таким образом, он мало-помалу пришел к построению обширной доктрины, которая заслуживала бы более глубокого и более детального исследования. Но интересно отметить то, что Маннури и его ученики отказались присоединить к их системе новые итоги в открытии оснований. Трудно не увидеть в этом сильное влияние психологического предубеждения.

Генетическая психология Пиаже отличается от современного психологизма стремлением не применять логики к реальному механизму мысли, но описать различные фазы интеллектуального развития посредством структур, вырабатываемых современной логикой. Этот метод в принципе является неоспоримым с логической точки зрения, и одно внимательное наблюдение интеллектуального развития, которому Пиаже посвятил десятки лет исканий, настолько же терпеливых, насколько и проницательных, может показать, будет ли такое описание возможным.

Единственное принципиальное возражение, которое логик может сделать Пиаже, это то, что автор извлекает из своих результатов аргументы против определенных выводов в исследовании оснований. Это, возможно, непоследовательность, проистекающая от влияния современного психологизма*.

Во всяком случае, мне хочется подчеркнуть, что интеллектуальное вдохновение, которое характеризует психологию Пиаже, мне глубоко симпатично.

* См. предисловие Бюро.

Глава III.

АБСТРАКЦИЯ В МАТЕМАТИКЕ И ЭВОЛЮЦИЯ АЛГЕБРЫ.

Жан Дьедонне.

Во все времена математика наряду с метафизикой представляла собою область, где оперируют только с «абстракциями» далеко от «конкретной» реальности и чувственного эксперимента. Отсюда сомнительный аспект, который они приобретают в глазах широкой публики, и тот факт, что многие, кто легко воспринимает идеи в других направлениях, остаются упорно несклонными ко всякой абстрактной мысли и приходят даже к объявлению «преступным» малейшие математические рассуждения. Мы склонны в наши дни, в частности среди преподавателей, оплакивать такое положение вещей и ухищряться маскировать или уменьшать возможно дольше абстрактный характер математики. Это, на мой взгляд, большое заблуждение. Конечно, речь идет не о том, чтобы с самого начала поставить детей перед лицом очень абстрактных понятий, но чтобы по мере развития их ума они этими понятиями овладевали и чтобы математика представилась бы в своем настоящем виде, когда у них сформируются структуры мысли. В конце концов, к каким целям стремятся в нашем цивилизованном мире, преподавая математику детям? Конечно, не к таким, чтобы познать теорему о биссектрисе треугольника или о последовательностях простых чисел, которым они никогда не найдут ни малейшего применения (по крайней мере, если они не станут профессионалами-математиками), но для того, чтобы научить их приказывать своим мыслям и управлять ими по методу, которым пользуются математики, а также и потому, что эти упражнения являются прекрасным средством развития ясности ума и строгости суждений. Именно эта сущность математического метода должна стать основой преподавания, а преподаваемый материал представляться лишь хорошо выбранной иллюстрацией.

Но в чем же заключается могущество математики, как не в возможности абстрагировать и оперировать над абстрактными понятиями? Мы колебались бы объявить такую тривиальную истину, если бы, как мы об этом говорили выше, эта истина не имела бы иногда тенденцию теряться из вида. Вот почему я думаю, что не-

бесполезно напомнить, что великий прогресс в математике был всегда связан с способностью подняться немного выше в область абстракции.

История алгебры от ее первого лепета до нашей «современной алгебры» иллюстрирует этот тезис на следующих страницах.

1. Алгебраические понятия.

Мы не будем задерживаться на происхождении (довольно темном) первых математических понятий, таких, как число, пространство или время. Отметим все же мимоходом, что, хотя они и служат нуждам практики, эти понятия все же очень абстрактны: если современная цивилизация, основой которой они являются, заставила бы нас забыть этот факт, достаточно было бы нам вспомнить о тех затруднениях, которые испытывает ребенок, чтобы достигнуть ясного усвоения этих понятий, или о некоторых примитивных культурах, у которых нумерация не идет дальше нескольких единиц и где иногда даже смешивают порядковые числа со считаемыми предметами.

Понятие числа развивается наряду с обычными арифметическими операциями, и желание производить эти операции быстро и корректно, как только возможно, привело, как мы знаем, некоторые культурные народы к тому, чтобы отмечать числа специальными знаками, расположенными таким образом, что арифметические операции могли осуществляться прямо на символах, обозначающих рассматриваемые числа, при помощи приспособленных для этого правил (не возвращаясь к определениям этих же самых операций и помогая при нужде для ускорения вычислений, например, употреблением счетов). Было несколько попыток такого рода, более или менее удачных, и понадобились многие века, прежде чем пришли к изображению системы, настолько удовлетворительной, как наша действующая «позиционная нумерация». Мы упомянули об этом, как об основной тенденции алгебры: обозначать сокращенно операции и их результаты как бы путем стенографии, довольно гибкой и довольно совершенной, чтобы сделать маневрирование этими операциями одновременно и более ясным, и более быстрым, и более легким¹.

Польза таких сокращений выявляется сразу, как только мы начинаем комбинировать арифметические операции между собою несколько более сложным способом, например тождества, которые мы напишем:

$$(1) \quad 1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n = \frac{n(n + 1)}{2}, \quad .$$

¹ Отметим попутно появление нуля в позиционной нумерации, который является существенной фигурой и свидетельствует об абстракции, до которой сами греки не могли никогда подняться.

$$(2) (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b),$$

можно, конечно, выразить на обычном языке, но это будет гораздо менее понятно, чем изображение их в виде формул¹. Попутно отметим, что понимание даже таких равенств требует уже более высокого уровня абстракции, чем при обычном понятии числа: действительно, надо сообразить, что операции, которые мы описали в двух частях равенства (1) и (2), осуществляются в общем виде, т. е. безотносительно к частным значениям чисел, которые там фигурируют. Замечательно, что эти законы были уже выведены (конечно, вначале эмпирически) у наиболее передовых народов древности, как у вавилонян и греков. Но они достаточно точно могут быть выражены обычным языком, и, несмотря на очевидную упрощенность, которую нам дает их алгебраическая транскрипция, нам кажется, что потребность в такой «стенографии» дала себя чувствовать слишком рано.

И только, без сомнения, в связи с решением уравнений эта потребность выявилась прежде всего. Известно, что эта проблема состоит в определении одного или нескольких чисел, удовлетворяющих данным условиям, которые могут быть записаны алгебраическими равенствами.

Возьмем в качестве примера следующую задачу: найти прямоугольник, разность сторон которого равняется 2, а площадь равна 8; переводим это на язык уравнения.

$$(3) x(x + 2) = 8 \text{ — для наименьшей стороны } x.$$

Когда это касается простой задачи, можно решение выразить обыкновенным языком, без особых затруднений. Так обычно делают в наши дни с так называемыми «арифметическими» задачами в начальных классах: вопрос идет о задачах, приводящих к решению уравнения первой степени с одним неизвестным $ax = b$, но которые, следуя ранее указанному методу (смещения, курьеры и т. д.), разрешаются каждый раз рассуждениями *ad hoc**. Такие приемы известны были вавилонянам², у которых мы их находим, к тому же без объяснений (они нам известны по крайней мере из всех учебников арифметики). У них находят также классическое правило решения уравнения второй степени, но без указания, каким путем они его получили. Греки классической эпохи разрешают уравнение второй степени, приводя его к проблемам геометрического построения и

¹ Например, равенство (2) означает: куб суммы двух чисел есть сумма кубов этих чисел плюс утроенное произведение суммы данных чисел на их произведение.

* *ad hoc* — для этой цели.

² Их почтенная древность, несомненно, служит причиной тому, что эти правила остаются такими, какими их преподают в наши дни, несмотря на неоднократные протесты математиков: если признать доказанным, что ребенок 10 лет не может понять механизма уравнений первой степени с одним неизвестным, пусть подождут несколько лет, но не вдалбливают ему в голову множество ненужных приемов.

оставаясь в стороне от течения алгебраической мысли в чистом виде; и хотя теоретическая алгебра выявляется у вавилонян уже на довольно высоком уровне, все же только у Диофанта (IV век н. э.) мы находим первые письменные источники, которые дошли до нас.

Прямой анализ уравнения одними средствами алгебры состоит, как мы знаем, в воспроизведении серии операций над неизвестным (или неизвестными), **как будто это относилось к количеству уже известному**; например, для уравнения (3) мы пишем последовательно $x(x+2)+1=9$, замечая, что первый член равен $(x+1)^2$, получим $(x+1)^2=9$, откуда $x+1=3$; $x=2$. Мы найдем очень многочисленные и разнообразные примеры этого метода у Диофанта, который им оперировал с редкой виртуозностью. Современный математик настолько привык к этому методу рассуждений, что эта смелость для нас неощутима; но на самом деле он требует такой абстракции, к которой могут оказаться неспособными даже наши, получившие научное образование современники, как только они сходят с проторенной дорожки¹.

И, конечно, не случайно, что впервые у Диофанта мы встречаем специальный знак, чтобы обозначить неизвестное проблемы: нетрудно понять необходимость, которая толкнула его на это, когда он пытался выразить на обычном языке операций, которые он применял для решения уравнений. В нашем примере (3) надо было бы сказать: «если прибавить единицу к площади прямоугольника, получат площадь квадрата, сторона которого будет меньшей стороной прямоугольника, увеличенной на единицу; площадь квадрата равна 9, сторона квадрата 3 и наименьшая сторона прямоугольника будет 2».

В этом примере можно легко выйти из положения благодаря геометрической интерпретации, но если хотим подобным образом оперировать в чисто алгебраических проблемах и особенно, когда имеется несколько неизвестных, то сразу попадают в галиматью, о которой даже юридический жаргон («вышеупомянутый, в третьем

¹ Все офицеры — слушатели артиллерийских курсов в 1930 году (во Франции) вспоминают знаменитый урок (на торжественном открытии) стрельбы по самолету: дело касалось стрельбы по цели, движущейся в предполагаемом известном направлении, и офицер-инструктор разрешил проблему следующим образом. Если в какой-то данный момент известно место M_0 самолета, то знают время, необходимое разрывному снаряду, чтобы его достичь. В конце этого времени t_0 самолет достигнет известной точки M и необходимо попытаться стрелять (начальный момент) в точку M , но длительность полета разрывного снаряда от пушки до M не равна здесь t_0 ; следовательно, заключил инструктор: «Мы пришли к порочному кругу, который можно решить, прибегая к методу последовательных приближений». В действительности, если t есть время, необходимое для перемещения из точки M_0 в P , то время T , необходимое снаряду, чтобы достичь P , будет известная функция $F(t)$ (таблицы стрельбы). Точка будущего положения самолета, которую нужно визировать и достичь в конце времени t , есть корень уравнения $t=F(t)$. Это и есть «порочный» круг задачи!

лице») дает только слабое представление¹. Диофант во всех случаях обозначает неизвестное и его шесть первых степеней символами: $\sigma\sigma$, σ^{\vee} , κ^{\vee} , $\sigma\sigma^{\vee}$, $\sigma\kappa^{\vee}$, $\kappa\kappa^{\vee}$, но он не имел символов для одновременно обозначения нескольких неизвестных, что практически мешает дать полное решение задачи, где имеется более одного неизвестного.

В течение средних веков методы и понятия Диофанта очень медленно совершенствовались. Были введены символы, позволяющие обозначить несколько неизвестных и их степени с небольшими показателями, и специальные знаки для некоторых современных алгебраических операций (например, у большинства алгебраистов этой эпохи $+$ и $-$ обозначаются p и m , квадратный корень R ; но знак равенства $=$ вводится только в середине XVI века и был везде принят только в конце XVII столетия).

Надо было ждать Шюке (XV век), чтобы увидеть появление обозначения показателей, которые входят в употребление только после Стевина (1600). Но и здесь еще наибольший прогресс был связан с наиболее абстрактной концепцией в алгебре: осознание факта, что процесс решения известных в то время уравнений (формулы решения уравнения до 4-й степени) не зависит от значения числовых коэффициентов, а лишь от степени уравнения. Виет (1540—1603) приходит к мысли обозначать буквами не только неизвестные, но также и «данные» — коэффициенты уравнений и его обозначения, значительно улучшенные Декартом и Ньютоном, уже сильно приближаются к нашим. Когда после Ньютона и Лейбница (последний прогресс) обозначили буквой степень самого уравнения и буквой с индексом a_k — коэффициент x^k в уравнении, уже подошли к такой точке, с которой можно разглядеть в общем виде проблему решения алгебраического уравнения:

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = 0.$$

Изучение этой проблемы займет весь XVIII век, чтобы завершиться наконец теорией Галуа (1830). Здесь уже можно сказать, дотрагиваются пальцем до самого главного: такие обширные проблемы не могли бы даже быть корректно сформулированы, ни тем более разрешены с каким бы то ни было шансом на успех, до того как понятия, которые в них фигурируют, не сделались бы достаточно абстрактными, чтобы претендовать на решение, свободное от всяких случайностей, затемняющих ранее известные частные случаи.

II. Неразрешимые уравнения.

Алгебраисты должны были очень скоро встретиться с проблемами, не допускающими решения. Мы здесь не будем вспоминать, как «неразрешимые» задачи первой степени заставили индусских

¹ Мы найдем убедительный пример этого изложения в правиле (в стихах!), которым Тарталья ознакомил Кардана со своим методом решения уравнения 3-й степени. Moritz Kantor. Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik, т. II, стр. 448, Лейпциг (B. G. Teubner), 1892).

математиков (V — VIII века н. э.) ввести отрицательные числа, тем более что в начале это делалось «формально», посредством расширения обычного счисления, каковой путь мы укажем ниже. Эти новые числа должны были довольно скоро достичь «конкретных» интерпретаций, приводя естественным образом к правилам, которые руководили операциями счета, а формальная точка зрения на них должна была появиться только в стадии дальнейшей эволюции алгебры (отрицательные числа в продолжение нескольких веков были предметом недоверия большинства математиков: Виет в XVI веке не хотел и слышать о них!). Гораздо более типичный пример дадут нам мнимые числа.

Как только был найден способ извлечения квадратного корня, заметили, что квадрат числа всегда положителен, и немногие алгебраисты средних веков, которые оперировали без колебания с отрицательными числами, казалось, не имели никогда побуждения (которое показалось бы, бесспорно, бессмысленным и парадоксальным) извлекать квадратные корни из отрицательных чисел. Только открытие решения «в радикалах» уравнения 3-й степени должно было показать необходимость расширения обычного вычисления квадратных корней. В начале XVI века итальянский математик Сципион дель Ферро открывает формулу (названную «формулой Кардана»), определяющую корень уравнения $x^3 = ax + b$:

$$(4) \quad x = \sqrt{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^3}{3}\right)}} + \\ + \sqrt{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^3}{3}\right)}}.$$

Когда в данном уравнении имеем $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^3}{3}\right) < 0$, формула (4) не имеет смысла. Между тем Кардан и его ученики не замедлили заметить, что даже в этом случае уравнение может иметь корни. Возьмем, например, уравнение $x^3 = 15x + 4$, рассматриваемое Бомбелли (конец XVI века); оно имеет корень $x = 4$, хотя $\left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{3}\right)^3 = -121$. Но примем, так как это сделал Бомбелли, что квадратные корни из отрицательных чисел были бы действительными числами, к которым применялись бы все обычные правила алгебраических вычислений, тогда после применения формулы (2) будем иметь:

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} = 2 + \sqrt{-121},$$

что позволяет написать

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1} \quad \text{и также} \\ \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1},$$

и формула (4) дает путем сложения корень $x = 4$. Другими словами, мы пришли к точному результату путем вычислений, не имевших смысла.

Прежде чем пришли к возможности объяснить этот кажущийся парадокс, понадобилось два века размышлений и попыток, во время которых математики мало-помалу осваивались с «мнимыми» числами и научились применять их все более и более продуктивно. Но только в начале XIX века дали себе отчет в том, что можно «считать» определенные «вещи», которые не суть числа, так, как будто бы это были числа. Так как это может быть самый трудный шаг при достижении вершин абстракции, мы попытаемся проанализировать подробно механизм операций над мнимыми числами.

1. Будем исходить от «вычислений», вначале лишенных смысла, как поступают с «мнимыми» числами $a + b\sqrt{-1}$, когда употребляют $\sqrt{-1}$ как будто это обыкновенное число, квадрат которого равен -1 . Все операции алгебры основаны на сложении и на умножении, поэтому нам достаточно рассмотреть эти последние, чтобы получить следующие результаты:

$$(5) \quad (a + b\sqrt{-1}) + (a' + b'\sqrt{-1}) = (a + a') + (b + b')\sqrt{-1},$$

$$(6) \quad (a + b\sqrt{-1})(a' + b'\sqrt{-1}) = (aa' - bb') + (ab' + ba')\sqrt{-1}.$$

Отметим еще раз, что как таковые эти равенства не имеют смысла, потому что $\sqrt{-1}$ не существует как общеупотребительное число. Но если мы заметим, что данное «мнимое» число $a + b\sqrt{-1}$ связано с данной парой (a, b) обыкновенных чисел, то сейчас же становится ясным, что равенства (5) и (6) могут вводиться как определяющие операции сложения и умножения над парами (a, b) обыкновенных чисел посредством условий:

$$(7) \quad (a, b) + (a', b') = (a + a', b + b'),$$

$$(8) \quad (a, b)(a', b') = (aa' - bb', ab' + ba').$$

Заметим, между прочим, что в «вычислениях» (лишенных смысла) над мнимыми числами число $a + 0\sqrt{-1}$ заменяют обыкновенным числом a , что позволяет, как мы это видели выше, после «вычислений» над мнимыми числами прийти к конечному результату, который будет представлять собою обычное число.

В нашей интерпретации это значит, что мы отождествляем пару $(a, 0)$ с числом a ; эта «тождественность» оправдывается тем, что числа a и пары $(a, 0)$ взаимно однозначно соответствуют друг другу, и, более того, это соответствие допускает операции сложения и умножения потому, что мы имеем по (7) и (8):

$$(9) \quad (a, 0) + (a', 0) = (a + a', 0)$$

$$(10) \quad (a, 0)(a', 0) = (aa', 0).$$

Имеется, как говорят, **изоморфизм** между обычным вычислением и вычислением над парами $(a, 0)$.

2. Этот первый шаг привел нас, таким образом, к определению двух операций над парами (a, b) обычных чисел, но можно без труда понять, что можно определить много других операций над этими парами (например, с первого взгляда видно, что естественнее было бы принять за правило умножения правило $(a, b)(a', b') = (aa', bb')$ вместо правила (8). Это правило удовлетворяет также условию (10). Это совершенно не объясняет факта (констатированного эмпирически), что алгебра «мнимых чисел» подчиняется тем же законам, каким подчиняется обычная алгебра. Это последнее утверждение довольно смутно, но можно его уточнить следующим способом: легко удостовериться, что все правила обычной алгебры, за исключением тех, где вводятся неравенства, суть логические следствия следующих правил:

$$(R) \left\{ \begin{array}{l} x + (y + z) = (x + y) + z; \quad x + y = y + x \\ 0 + x = x, \quad x + (-x) = 0 \\ x(y + z) = xy + xz \\ x(yz) = (xy)z, \quad xy = yx \\ 1 \cdot x = x, \quad x \cdot (1/x) = 1, \text{ если } x \neq 0. \end{array} \right.$$

Например, из этих правил следует, что $x \cdot x = (0 + x) \cdot x = 0 \cdot x + x \cdot x$, откуда $0 = (x \cdot x) + (-x \cdot x) = (0 \cdot x + x \cdot x) + (-x \cdot x) = 0 \cdot x + (x \cdot x + (-x \cdot x)) = 0 \cdot x + 0 = 0 \cdot x$. Также, если $x \neq 0$ и $y \neq 0$, имеем: $xy \neq 0$; действительно, в противном случае, мы имели бы из равенства $xy = 0$ последовательно $(1/x)(xy) = 0$, потом $((1/x)x)y = 0, 1 \cdot y = 0$ и окончательно $y = 0$, что приводит к противоречию.

Установив это и заменяя числа x, y, z парами (a, b) с правилами действий (7) и (8), убедимся, что правила (R) также справедливы, если только заменим 0 парой $(0, 0)$, 1 — парой $(1, 0)$, $-(a, b)$ через $(-a, -b)$ и $1/(a, b)$ (для a и b , не равных 0) через $\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}$. Это объясняет возможность производить над нашими парами (a, b) все обычные алгебраические вычисления; между прочим, в новой системе «комплексных чисел» пара $i = (0, 1)$ такова, что $i^2 = (-1, 0)$, согласно (8). «Вычисления над мнимыми числами» таким образом полностью узаконены.

3. Между прочим, этим мы лишь установили факт и потому, естественно, может возникнуть вопрос: можно ли дать другие правила вычислений пар (a, b) , которые так же удовлетворяли бы условиям (R) . Оказывается, можно показать, что всякое другое определение, удовлетворяющее этим условиям, дает то же самое исчисление, лишь бы только сохранилось определение (7) сложения и чтобы имело место соотношение $(a, 0)(c, d) = (ac, ad)$ (11) (другими словами, частный случай соотношения (8), где первый множитель будет типа $(a, 0)$. Тогда мы получим возможность отождест-

вить $(a, 0)$ с числом a (соотношения (9) и (10)), в частности, пара $(1, 0)$ отождествляется с числом 1; если положить $e = (0, 1)$, вся пара (a, b) может тогда быть записана в виде $ae + b$. Четыре первых правила (R) могут быть установлены теми же подстановками, как приведенные выше. Соотношение $a + be = 0$ будет эквивалентно $a = b = 0$. Установив это, будем иметь, в частности,

$$e^2 = \beta + \alpha e,$$

для двух, подходящим образом подобранных чисел α, β ; но это условие можно записать и так:

$$\left(e - \frac{\alpha}{2}\right)^2 = \beta + \frac{\alpha^2}{4} \text{ или } (12) e'^2 = \gamma, \text{ где } e' = e - \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{и } \gamma = \beta + \frac{\alpha^2}{4}.$$

Покажем, что число γ будет обязательно *отрицательным*. Действительно, в противном случае можно было бы написать $\lambda = \lambda^2$, и отсюда сейчас следовало бы согласно правилам (R), предполагаемых истинными, и из (11), что

$$(e' - \lambda)(e' + \lambda) = 0.$$

Но выше мы видели, что из правил (R) с необходимостью следует: или $e' - \lambda = 0$ или $e' + \lambda = 0$, а ни одно из этих условий невозможно, потому что в первом члене каждого из них коэффициент при e не равен 0. Поэтому следует предположить $\gamma < 0$. Пусть $\gamma = -\mu^2$ при $\mu > 0$. Положив $e'' = \frac{1}{\mu}e'$, получим: $e''^2 = -1$.

Заметим также, что можно написать $a + be = a' + b'e''$, где $a' = a + b\frac{\alpha}{2}$ и $b' = b\mu$; из этих формул видим, что обратно a и b можно выразить как линейные функции от a' и b' , следовательно, мы установили этим взаимно однозначное соответствие между парами (a, b) и парами (a', b') так, что сложению и умножению, определенным для пар (a, b) , для пар (a', b') , соответствуют сложение и умножение, определяемые (7) и (8). Другими словами, имеется изоморфизм между двумя исчислениями, в чем и заключается свойство единственности, которое мы имели в виду.

4. Другая идея, которая, естественно, возникла в начале XIX века, состояла в том, чтобы выяснить, возможно ли получить подобные результаты, рассматривая не только пары, но и тройки (a, b, c) или вообще системы (a_1, a_2, \dots, a_n) этих чисел. Замечательно, что уже нельзя было установить правил (R) по крайней мере тогда, когда хотим сохранить для сложения определение, аналогичное (7), а для умножения — единственное аналогичное условие (11).

Покажем это, например, по отношению к $n = 3$. Условия будут следующие:

$$(13) (a, b, c) + (a', b', c') = (a + a', b + b', c + c'),$$

$$(14) (a, 0, 0)(a', b', c') = (aa', ab', ac'),$$

откуда, в частности, мы должны будем иметь:

$$(15) (a, 0, 0) + (a', 0, 0) = (a + a', 0, 0),$$

$$(16) (a, 0, 0) (a', 0, 0) = (aa', 0, 0),$$

что позволит написать a вместо $(a, 0, 0)$, откуда $(a, b, c) = a + be_1 + ce_2$, где $e_1 = (0, 1, 0)$ и $e_2 = (0, 0, 1)$. Четыре первых правила (R) будут действительны для $0 = (0, 0, 0)$ и $-(a, b, c) = (-a, -b, -c)$; соотношение $a + be_1 + ce_2 = 0$ будет эквивалентно $a = b = c = 0$. Отсюда теория линейных уравнений показывает, что так как нужно иметь $e_1^2 = (\alpha, \beta, \gamma)$ и $e_1^3 = (\alpha', \beta', \gamma')$ и для соответственных троек нужно иметь линейную зависимость между четырьмя тройками $1, e_1, e_1^2, e_1^3$ с коэффициентами, не равными 0 одновременно, то получим:

$$a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_1^2 + a_3 e_1^3 = 0.$$

Очевидно, невозможно, чтобы имелось равенство: $a_2 = a_3 = 0$; но если $a_3 \neq 0$, то полином третьей степени $a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ допускает по крайней мере один действительный корень b и может быть записан тождественно в виде $a_3(x - b)(x^2 + b_1 x + b_0)$. Применяя вновь правило (R) , мы получим:

$$a_3(e_1 - b)(e^2 + b_1 e_1 + b_0) = 0$$

и так как уже было указано, $a_3 \neq 0$ и $e_1 - b \neq 0$, то отсюда получим: $e_1^2 + b_1 e_1 + b_0 = 0$. Во всех случаях мы найдем соотношения того же вида, и, рассуждая, как и выше для пар, мы видим, что, заменяя e_1 соответствующей комбинацией вида $\lambda e_1 + \mu$, где $\lambda \neq 0$, можно положить, что $e_1^2 = -1$. Подобным же образом можно привести к случаю, где $e_2^2 = -1$; но тогда из равенства $e_1^2 - e_2^2$ посредством правила (R) получим $(e_1 - e_2)(e_1 + e_2) = 0$, чего не может быть, потому что ни один из членов $e_1 - e_2, e_1 + e_2$ не равен нулю. Аналогичный метод ведет к таким же результатам и для системы (a_1, a_2, \dots, a_n) некоторого числа элементов.

III. Формальные вычисления и современная алгебра.

Изложение теории комплексных чисел, которые мы имеем в виду, обязано своим открытием Гамильтону (1840), но по существу оно восходит к фундаментальным работам о геометрическом представлении мнимых чисел Весселя, Гаусса и Аргана в начале XIX века. Эти работы, так же как и другие, относящиеся к той же самой эпохе, принимая вид теории групп, делают первый решительный шаг к абстрактной алгебре: они уже рискуют **определять** по отношению к некоторым типам предметов операции, которые не были даны «естественно». Другими словами, в сознание математиков начинает проникать идея возможностей **создания** новых исчислений над новыми предметами, вместо того чтобы пассивно ограничиться теми, которые казались вынужденными ему конкретным содержанием математики.

Одним из свойств природы революции является — никогда не останавливаться на полпути: едва был только сделан этот первый шаг к освобождению, как новые силы снесли с земли старую тюрьму, где укрылась классическая математика. С исчислением комплексных чисел начали искать возможность расширения области «чисел», для которой операции обычной алгебры были бы применимы, но не собирались изменять фундаментальных правил (R) алгебраических исчислений; отсюда, в частности, бесплодные попытки, о которых мы говорили выше. Второй акт освобождения уничтожил и это табу.

В рассмотренном выше случае исчисление операторов открыло путь. Геометрическая интерпретация комплексных чисел, где числу $\alpha + \beta i$ сопоставляется точка плоскости с прямоугольными координатами (α, β) , дает, между прочим, и простую геометрическую интерпретацию некоторых алгебраических операций. Например, известно, что функция комплексного переменного, которая данному числу z относит число $z + a$, где $a = \alpha + \beta i$, соответствует трансляции с вектором (α, β) ; точно так же функция, в которой всякому числу z соответствует число ξz , где $\xi = \cos \Theta + i \sin \Theta$, соответствует вращению на угол Θ около начала. Осуществляя два вращения на углы Θ, Θ' последовательно, приходим к последовательному умножению z на два постоянных числа: ξ и $\xi' = \cos \Theta' + i \sin \Theta'$, что приводит также к умножению z на $\xi' \xi$. Отсюда совершенно естественно переходим к «символическому» обозначению, где обозначаются сами вращения (а не связанные с ними комплексные числа) буквами S, S' , и $S'S$ — вращение, полученное последовательным применением вращения S , потом вращения S' (здесь имеет место к тому же $SS' = S'S$). Это обозначение, очевидно, очень близко подходит по смыслу и по форме к обозначению $f(g(x))$, введенному во времена Лейбница для суперпозиции функций. Естественно подобную символику распространить и на другие геометрические преобразования. Например, обозначая буквой некоторое движение плоскости, обозначим TS движение, полученное применением вначале движения S , потом — движения T . Мы находимся в положении, имеющем некоторую аналогию с исчислением пар: на этот раз мы определили «умножение» движений, получив, таким образом, одну операцию вместо двух. Можно ли так же исчислять эти новые объекты?

На первый взгляд это не кажется возможным, потому что первые 5 правил (R) не имеют больше смысла; в основном, между прочим, уже не является верным, что $TS = ST$, что можно увидеть, приняв за T трансляцию, а за S вращение на 180° вокруг точки. Все же мы имеем еще $(ST)U = S(TU)$ для трех произвольных движений S, T, U , и, подбирая подходящим образом символы, мы убедимся, что и два последних правила (R) имеют место в нашем новом «исчислении». Достаточно, действительно, условиться рассматривать как движение «тождественное движение» — I операцию, которая состоит в преобразовании каждой точки плоскости в саму

себя; с другой стороны, можно привести в соответствие каждому движению S движение «обратное» S^{-1} , которое, будучи применено к каждой точке, возвращает ее в положение, которое она занимала до движения S . На основании этих условий получим правила: $IS = SI = S$ и $SS^{-1} = S^{-1}S = I$. Таким образом, мы пришли к некоторому виду «частичного исчисления», когда не только предметы не являются больше числами (и являются понятиями довольно далекими от обычных чисел), но где даже сами правила исчисления не являются больше обычными правилами. Мы видим, что эти последние отнюдь не неосязаемы, и, начиная с середины XIX века, можно уже различить алгебру более обширную, где соединились наряду со старой классической алгеброй все «исчисления», которые появлялись мало-помалу в многочисленных областях математики по мере ее развития.

Это направление, в котором более или менее сознательно работала большая часть алгебраистов в течение более одного столетия и которое все более развивалось, нашло свое осуществление в нашей современной алгебре. Во время этой большой работы все более и более выявлялось, что из двух основных составляющих всякого «исчисления», т. е. из тех объектов, над которыми производят какие-то операции и, с другой стороны, правилами операций, только последние являются действительно существенными. На этом высшем этапе абстракции, к которой, естественно, вели многочисленные примеры постоянно наблюдаемого «изоморфизма», «предметы» вычислений имеют «природу», которая остается почти целиком неопределенной: точнее, алгебраист в своих вычислениях не хочет знать об этих объектах ничего, кроме **единственного факта**, что они послушны законам, которые он изучает. В этом и состоит то, что называется **аксиоматическим методом** в алгебре.

С этой точки зрения при изучении «исчисления», или, как еще говорят, **алгебраической структуры**, принимают за основу данное множество предметов E и определенное число операций n , каждая из которых состоит в отнесении к двум произвольным элементам x, y из E третьего элемента $f_i(x, y)$ ($1 \leq i \leq n$). Результат каждой из этих операций определяется обычно разделением x и y знаком, определяющим операцию как $+$, или \times , или $:$, или T , или даже приставляя x и y один к другому без всякого знака; выбор этого знака зависит всецело от желания математика, выбирающего его сообразно с применением, которое он имеет в виду: здесь еще не имеется знаков «натуральных» (или традиционных!), заранее заданных. Что характеризует вид алгебраической структуры, которую мы изучаем, — это различные соотношения (или «аксиомы» структуры), которые вводят *árgiori* между данными операциями. Например, структура, где имеются две операции, обозначенные $+$ и \cdot (этот знак может быть по желанию опущен), с двумя привилегированными элементами, обозначенными $0, 1$, и для каждого x в E (соотв. $x \neq 0$) имеется элемент, обозначенный x' (соотв. $1/x$) в E , и притом такая, что правила (R) будут все приемлемы, назы-

вается **структурой коммутативного тела**. Такая структура имеется в совокупности комплексных чисел, в совокупности чисел рациональных, в совокупности чисел $a + b\sqrt{2}$, где a и b рациональны, и еще во многих других. Точно так же исчисление движений, о котором мы говорили выше, есть частный случай **структуры групп**: в этой структуре имеется одна операция, которую мы вводим под обозначением T , и привилегированный элемент, обозначенный e с «аксиомами»:

- (G_1) $xT(yTz) = (xTy)Tz$, какие бы ни были x, y, z из E ;
- (G_2) $eTx = xTe = x$, какой бы ни был x из E ;
- (G_3) для всякого x из E имеется x' из E так, что $xTx' = x'Tx = e$.

Заметим, что три правила (R) , относящиеся к сложению в коммутативном теле, будут переводом предыдущих аксиом, сделанным по следующему «словарю»: заменяют T через $+$, e через 0 и x^1 через $(-x)$. Также три правила (R) , относящиеся к умножению в совокупности элементов $\neq 0$ тела, суть переводы аксиом групп, сделанные на этот раз по другому «словарю»: заменяют T через \cdot (или ее подразумевают), заменяют e через 1 и x' через $1/x$. Эти примеры указывают на большое число различных случаев, обнаруживающих присутствие структуры групп: действительно, нет ни одной области современной математики, где бы не использовалась эта структура, часто несколькими методами. Они показывают также, что, если хотят прийти к понятию, приложимому к наибольшему числу возможных случаев, надо уметь отвлекаться от частных особенностей каждого из этих случаев и рассуждать совершенно абстрактно.

Можно видеть также, что изучение этих структур может предоставить математику орудия универсальной значимости. В море развития математических работ всех видов, которое с каждым годом становится все более и более полноводным, только аксиоматический метод позволяет установить связь между различными новыми открытиями, классифицировать их, присоединять их к предыдущим результатам, часто их очень упрощая, а иногда увеличивая их содержание, анализируя до глубины их возможности и поднимая их на большую принципиальную высоту. Но, чтобы они могли полностью выполнить свою функцию, необходимо, чтобы алгебраические структуры достигли своей гибкости и своей пластичности ценой абстракции, поднятой на наибольшую высоту, которой она достигнет только благодаря усилиям интеллекта.

Глава IV.

ПРОНИКНОВЕНИЕ ДУХА СОВРЕМЕННОЙ АЛГЕБРЫ В ЭЛЕМЕНТАРНУЮ АЛГЕБРУ И ГЕОМЕТРИЮ.

А. Лихнерович.

В процессе преподавания такой науки, как наша, возникают существенные трудности двоякого рода, которые необходимо разумно преодолеть. Наше преподавание, на каком бы уровне оно ни находилось, должно опираться на непосредственную очевидность для наших учащихся, что часто бывает наиболее трудным. В то же время оно должно иметь в виду и характер современной науки, а мы знаем, что сочетание обоих требований вызывает наибольшие затруднения. Но я думаю, что как раз эти самые трудности и составляют гордость нашей науки.

Я не буду здесь останавливаться на трудностях первого рода, потому что в выступлениях несравненно более компетентных и авторитетных, чем мое, вам было рассказано о результатах больших педагогических экспериментов в преподавании математики в средней школе. Моя роль будет иная.

В течение многих лет я занимался подготовкой будущих учителей для средней школы и, с другой стороны, я по мере моих сил принимал участие в развитии современной математики. Упомянутое выше требование вызывает во мне чувство некоторого затруднения, которое мне хотелось бы разрешить вместе с вами: в какой степени возможно внести дух современной математики в наше преподавание в средней школе?

Я хотел бы, чтобы вы убедились в необходимости постановки такой проблемы. Преподаватель высшей школы в процессе своей работы часто убеждается в том, что классическое преподавание в наших лицах обуславливает для довольно широкого круга слушателей такое понимание математики, которое напоминает игру в «гусек», недавно возобновившуюся в Греции (14), и каковое, с другой стороны, ведет свое начало от опыта математиков середины XIX столетия. За последние сто лет было сделано много математических открытий, многие этапы были пройдены и сами стремления математиков, их собственные точки зрения радикально изменились. На наших же учеников все это произвело впечатление удара. Они резко столкнулись с идеями современной математики,

и это болезненное столкновение дает себя чувствовать в университете и в других высших школах. Учащийся в известной мере должен делать вещи, являющиеся сложными для всех, он должен уметь полностью освободиться от некоторых условностей, он должен осваивать представления до этого ему чуждые и прийти к перераспределению совокупности его знаний в свете новых понятий, выраженных иным языком, языком не только отличным от прежнего, но который также приносит новые мысли; все это короче можно выразить фразой, которую я лично часто слышал, и думаю, что не я один: «То, что вы нам преподаете, — это уже не математика» — фраза довольно курьезная, которая указывает на известную растерянность и неуверенность. Я думаю, что все это относится не только к тем, кто посвятил себя математике. Это тоже касается и тех, кто, как инженер, техник или физик, вынужден пользоваться математикой как средством или инструментом. А кто же в нашем обществе не думал в той или иной степени о математике как об инструменте?

Не является ли прикладная математика нашего времени в глазах классика не менее абстрактной и не менее чуждой ему, чем так называемая чистая математика. Я думаю, что мы должны согласиться с этим положением. Нам нужно найти средство ослабить вышеуказанное столкновение и добиться такого преподавания, которое даже с самого начала было бы более близким к жизни нашей науки. Прошу извинить меня, но я не думаю, что для достижения этой цели нам нужно строить преподавание в историческом плане. Я даже думаю, что наше преподавание на самом деле и без того слишком считается с историческими традициями и что математические понятия, которые оно дает, еще далеки от их современной трактовки.

Что я могу сказать о классической арифметике, которая преподается во Франции в математических классах? Я скажу, что она излагается в стиле начала XIX столетия и что она представляет собой вид смешного преклонения перед операциями, скрытый смысл которых не зависит от чисел, над которыми она оперирует. Наши учащиеся, какими мы их получаем, верят в существование сложения и умножения, действующих в абсолютно бесконечной вселенной.

Что касается нашей элементарной геометрии, то ее прогресс дал наиболее интересные результаты, но все же она еще слишком близка к Евклиду.

Существенное затруднение и основное препятствие в преподавании в историческом плане заключается в характерной для математики особенности думать и передумывать про все целиком, но это же является и залогом ее прогресса. Нельзя иметь, как мне кажется, раз и навсегда приложимые ко всем случаям способы изложения арифметики и элементарной геометрии, которые только немного нужно было бы подправить в свете указаний педагогической психологии. Но в силу самой общности математики уяснение первоначальных понятий и теорем подвергается неизбежной и полной

переработке. То, что являлось первоначальным этапом на пути исканий, превращается в простое упражнение при новых точках зрения.

Прежде чем перейти к непосредственно математическим вопросам, я позволю себе рассказать маленький анекдот. Несколько лет тому назад я дал в одной книге более или менее современное изложение старой теории определителей, и во время конкурсных экзаменов один кандидат — это была даже кандидатка — использовала это изложение для того, чтобы дать урок, который был к тому же хорошим. Реакция же некоторых членов жюри была следующей (она не была бы такой, если бы не господствовала сила привычки): «Это те же классические теоремы, но порядок их необычен, и они плохо воспринимаются. Все это кажется не более естественным, чем обычный метод изложения». Жюри все же признало урок отличным. Не желая защищать свое авторское самолюбие, я все же подумал, что это есть результат, вызванный привычной точкой зрения, заставившей признать этот урок также мало естественным, как и классическое изложение, которое, надо признаться, является прямо-таки чудовищным. Я думаю, что нужно опасаться признавать естественным или близким к очевидности лишь то, к чему мы, преподаватели, привыкли, и что мы сами в известной мере создаем. То, что является естественным для преподавателя, не всегда совпадает ни с чисто математической очевидностью, ни с очевидностью для учащихся. В итоге этот вывод скорее ободряет и облегчает, потому что он дает нам уверенность, что в нашем преподавании мы можем пользоваться большей свободой, чем это кажется на первый взгляд. Понятие естественности или очевидности, конечно, не должно приниматься *à priori*, но должно быть предметом терпеливого и детального экспериментального исследования.

Итак, что же мы можем сделать в преподавании в школе второй ступени, если мы хотим, чтобы оно было достаточно активным и разумным и чтобы его метод не противоречил основам нашего педагогического опыта? Характерной особенностью понятий современной математики, являющейся, как мне кажется, основной, есть преимущественное положение структур и алгебраических операций. Я нахожу это вполне подходящим для того, чтобы в течение достаточно продолжительного времени мы могли подготовить базу для освоения начал алгебраической техники. И мне кажется, что путем настоячивых экспериментов каждого из нас, оставляя в неприкосновенности священные программы, можно внести до некоторой степени дух современной алгебры в арифметику и элементарную алгебру и в большей степени (что частично уже сделано) в элементарную геометрию.

В таком преподавании не может быть речи о догматическом изложении абстрактных теорий, но, я думаю, что посредством многочисленных элементарных примеров можно выводить основные понятия так, чтобы приучить учеников с самого начала усваивать принципы алгебраических структур, с которыми они встречаются очень рано, но которых им не дают возможности узнать. Уча-

щиеся, производя действия над целыми числами и производя действия над многочленами, смутно чувствуют нечто общее между ними, но очень редко им объясняют причину этой общности при переходе от чисел к многочленам.

Что же в конце концов представляет собою элементарная алгебра в ее основах? Это, без сомнения, есть конструкция (я прошу извинения — это будет единственное слово, которое я буду употреблять без определения) определенных **множеств** чисел — чисел рациональных, чисел действительных, положительных или любых знаков, в которой изучают то, что на языке современной алгебры называется законом композиции в этих множествах чисел. С другой стороны, само учение современной алгебры начинается с закона композиции, который двум элементам множества a и b относит третий элемент, что обозначается вполне произвольным способом записи. Этот закон композиции может быть или не быть ассоциативным или коммутативным, допускать или не допускать нейтральный элемент. Примеры подобного рода, которые вначале поражают наших учащихся, на самом деле встречались им и раньше, но они этого не замечали, что, может быть и хорошо, так как мы можем помочь им это заметить путем беседы с ними. Может быть, стоит обратить их внимание на то, что существует закон композиции над рациональными числами, именно — a^b , закон, сочетающий рациональные числа a и b , очень простой и постоянно встречающийся, но который в то же время не является ни ассоциативным, ни коммутативным; этот закон является для них относительно простым. Таким образом, закон, который не является ни ассоциативным, ни коммутативным, не представится им чудовищным, так как они с ним имели дело.

Нейтральный элемент для закона композиции (я беру мультипликативное обозначение), обозначаемый мною через e , обладает таким свойством, что при композиции с любым элементом a справа или слева он вновь дает тот же элемент a . Но существует очень простой закон композиции, который, очевидно, не имеет нейтрального элемента; это, например, закон, согласно которому из каждой пары рациональных чисел a и b выбирается наибольшее. Эта композиция рациональных чисел дает определенное число, но для этой композиции не существует нейтрального элемента. Не существует такого элемента e , который в композиции с любым рациональным a дал бы то же самое a как максимальное число этой пары.

Наконец, в классах элементарной математики изучаются движения в плоскости и в пространстве, и в этих движениях мы встречаемся с законами, которые ассоциативны, но не коммутативны.

Тогда становится возможным, учитывая эти замечания, довести до сознания учащихся разницу между движениями и сопоставить эти результаты друг с другом, а также с хорошо известными результатами сложения и умножения рациональных чисел.

Первым основным понятием алгебры является понятие абстрактной группы.

На самом деле понятие группы вполне элементарно, по крайней мере в тех примерах, с которыми мы встречаемся. Вы знаете, что группа есть множество, в котором установлен закон композиции в смысле только что указанном мною, закон этот должен удовлетворять трем условиям.

Первое из условий есть закон ассоциативности, что вполне очевидно.

Второе условие состоит в необходимости существования нейтрального элемента, также в указанном мною смысле. При мультипликативном способе обозначения этот закон таков:

$$a \cdot e = e \cdot a = a.$$

Наконец, третьим условием является существование обратного элемента для каждого элемента множества, это значит, что для каждого элемента a можно найти такой элемент a^{-1} , что $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

Я пользуюсь здесь мультипликативным обозначением закона композиции. Но можно использовать и другие обозначения, например обозначение аддитивное, в котором нейтральный элемент обозначается знаком нуль. Группа называется коммутативной или абелевой, если закон композиции коммутативен; для коммутативных групп обычно применяется аддитивное обозначение композиции; многочисленные примеры подобного рода мы имеем в алгебре.

С обычным сложением в качестве закона композиции мы встречаемся в числах целых, рациональных и действительных всех знаков, которые по отношению к сложению образуют абелевы группы. Закон композиции, очевидно, ассоциативен, и для каждого элемента существует обратный элемент с противоположным знаком.

Заметим также, что многочлены или рациональные дроби при надлежащем выборе закона композиции образуют такие же группы. Это же можно получить и с обычным умножением в этих множествах; тогда целые, рациональные, действительные числа (исключая число «нуль») **обязательно положительные** или целые, рациональные, действительные, **отличные от нуля**, образуют мультипликативные группы. Это же самое имеет место и для рациональных дробей. В геометрии математических классов теперь вводят, и по-моему довольно успешно, понятие о группе преобразований. Здесь положение несколько меняется. В данном случае рассматриваемое множество есть совокупность точечных преобразований пространства и закон композиции дан; это есть обычное произведение преобразований. Итак, можно попытаться сопоставить, с одной стороны, аксиомы групп, а с другой стороны, известные свойства преобразований подобия и движения, например, в пространстве. Непосредственно очевидно, что, для того

чтобы множество G преобразований было группой преобразований, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись три основных условия.

Каким же условиям мы должны их подчинить? Ассоциативность закона композиции выполняется автоматически, также автоматически определяется нейтральный элемент, которым является тождественное преобразование, не изменяющее ни одной точки пространства, имеется также возможность для каждого преобразования определить преобразование обратное. Необходимо, чтобы эти условия выполнялись в совокупности G рассматриваемых преобразований.

Необходимо, следовательно:

а¹) чтобы произведение преобразований, принадлежащих G , например, x и y давало бы преобразование, также принадлежащее G .

б¹) чтобы нейтральный элемент — тождественное преобразование — принадлежало G .

с¹) чтобы преобразование, обратное любому преобразованию x из G , также принадлежало G .

Таковы аксиомы группы преобразований. Не считая возможным совершенно отрешиться от этих абстрактных понятий, я все же думаю, что, когда хотят в процессе доказательства выделить определенные свойства применяемой аксиомы, их нужно сделать очевидными на конкретных примерах. Я хочу обратить внимание на то, что существует относительно простое понятие, которое, несмотря на свою полезность, редко вводится, и полагаю, что его можно было бы объяснить довольно просто; я имею в виду понятие отношения эквивалентности.

Что называется **отношением эквивалентности** между двумя элементами из E ? Это такое отношение, когда все рассматриваемые в данном аспекте свойства элементов таковы, что мы эти элементы считаем равными. Каковы эти свойства? Эти свойства даны в следующей записи, в которой мы отношение эквивалентности обозначим обычным знаком равенства:

а'') первое, абсолютно необходимое свойство состоит в том, что каждый элемент x эквивалентен самому себе $x = x$.

б'') Второе свойство состоит в том, что это отношение между двумя элементами симметрично, т. е. из отношения $x = y$ следует $y = x$.

с'') Третье свойство заключается в законе транзитивности (две величины, равные одной и той же третьей, равны и между собою), который состоит в том, что если x эквивалентен y , а y эквивалентен z , то x эквивалентен z .

Нетрудно видеть, что аксиомы отношения эквивалентности в точности соответствуют аксиомам группы преобразований.

Рассмотрим некоторую фигуру F обычного пространства и группу преобразований G . Будем говорить, что фигура F эквивалентна фигуре F' относительно группы G , если в группе G су-

существует преобразование x , которое преобразует F в F' , что мы запишем так: $F' \equiv xF$ (x преобразует фигуру F). Будет ли это отношением эквивалентности? Это будет соотношением эквивалентности в силу трех аксиом группы преобразований. F эквивалентна самой себе. Лучше сказать $F \equiv F$, т. е. преобразование тождества, принадлежащее G , преобразует F саму в себя. Когда мы хотим доказать b''), то должны убедиться, что если фигура F' эквивалентна F , то и, обратно, фигура F эквивалентна F' . Но первое соотношение существует, если существует такое преобразование x , что F тождественно с xF , а тогда в G существует и такое x^{-1} , что $F \equiv x^{-1}F'$. Наконец, если мы возьмем a''), то мы должны доказать, что из отношений $F' \equiv xF$ и $F'' \equiv yF'$ следует, что F эквивалентна F'' . Переведем все это на язык преобразований. Мы имеем такое преобразование x , что $F' \equiv xF$, и такое преобразование y , что $F'' \equiv yF'$. Мы видим, что F'' есть yxF , но yx , как произведение преобразований, принадлежит G . Следовательно, мы пришли к отношениям эквивалентности. Мы рассмотрели применение понятия эквивалентности по отношению к произвольной группе. Именно с точки зрения эквивалентности (или равенства) группа движений рассматривается в геометрии. Я думаю, что это понятие эквивалентности может быть использовано сравнительно рано и притом в весьма разнообразных целях. Я хотел бы еще привести несколько простых примеров. На уроках в первом классе изучают классически параллельность прямых и плоскостей. Для того чтобы понятие параллельности прямых сделать более ясным, нужно обратить внимание на то, что соотношение параллельности двух прямых есть в то же время отношение эквивалентности; систематическим разъяснением этого факта можно добиться и более ясного и более элегантного изложения теории параллельности прямых и плоскостей.

Точно так же классическое соотношение эквивалентности между связанными векторами есть опять-таки отношение эквивалентности. В арифметике пример отношения эквивалентности дают классы целых чисел, сравнимых по модулю p , что непосредственно связано с теорией делимости в арифметике. В этом случае эквивалентными считаются два целых числа, дающие равные остатки при делении на одно и то же целое число p .

Хорошо известной группой является аддитивная группа классов действительных чисел, сравнимых по модулю 2π .

Уже в этих примерах можно увидеть некоторые случаи очень элементарного изоморфизма между группами, который заключается в том, что можно найти подходящий словарь между двумя совокупностями элементов, математическая «природа» которых различна. Глубокое основание этого факта заключается в том, что математическая «природа» есть то, что не имеет никакого точного смысла. Изоморфизм между двумя группами заключается в том, что при помощи надлежащим образом подобранного словаря можно законы композиции одной группы перенести на другую.

Наиболее элементарным примером такого изоморфизма может послужить группа вращений в плоскости с одним и тем же центром и аддитивной группой классов действительных чисел, сравнимых по модулю 2π . Вращение около постоянного центра вполне определяется заданием угла в его классическом определении. В этом изоморфизме подразумевается, что понятие угла должно быть обобщено. Для этого угол представляют при помощи числа, чем обуславливается факт изоморфизма между двумя группами.

Интересно также, что логарифмическая функция позволяет установить изоморфизм между мультипликативной группой существенно положительных чисел и аддитивной группой действительных чисел всех знаков.

Быть может, при помощи этих примеров стоило бы попробовать разрушить непроницаемые перегородки между отдельными областями элементарной математики и показать, что существуют некоторые понятия, которые очень интересным способом могут быть введены в различные ответвления математики.

Помимо предыдущих понятий, которые лежат в основе других фундаментальных понятий, существуют другие, относительно простые, которые могут быть довольно легко разъяснены. Современная алгебра пользуется понятием кольца и тела. Известно, что кольцо есть множество, для которого определено два закона композиции: один закон аддитивный, определяющий сложение в кольце, и закон мультипликативный, определяющий умножение; эти два закона определяются следующими условиями: первый, определяющий сложение, дает абелеву коммутативную группу, т. е. он пользуется свойствами обычного сложения; второй закон является ассоциативным в себе и дистрибутивным справа и слева по отношению к сложению (я говорю справа и слева, потому что второй закон может и не быть коммутативным).

Множество **целых** чисел, множество рациональных и действительных чисел всех знаков дают, очевидно, примеры колец. Это же имеет место для **многочленов**, для рациональных дробей. Все это — кольца, с которыми приходится постоянно обращаться. Наконец, еще один интересный пример кольца дают нам классы эквивалентных между собою целых чисел, сравнимых по простому модулю p .

Понятию кольца можно привести очень большое число примеров. Среди этих колец интересным частным случаем является тот, когда кольцо представляет собою тело. Тело есть кольцо, которое состоит из двух групп. Мультипликативный закон этого кольца таков, что на множестве его элементов, за исключением нуля, т. е. нейтрального элемента аддитивной группы, имеется структура группы. Отсюда непосредственно следует, что каждому элементу, за исключением элемента, обозначаемого символом 0, в мультипликативном смысле соответствует обратный элемент. Далее, отсюда выводим, что множества рациональных чисел, действительных чисел, рациональных дробей являются телом в смысле

только что данного определения, и большая часть операций над ними совершается по правилам тела. Это не имеет места ни для целых чисел, ни для многочленов; число, обратное целому, вообще говоря, не является целым. Множество чисел, обратных целым, не принадлежит множеству целых чисел, поэтому целые числа дают простейший пример кольца, не являющегося телом. Это же можно сказать и о многочленах.

Наконец, в кольце классов целых чисел, сравнимых по модулю p , можно указать очень интересный пример. Именно: известен элементарный факт, что если p есть простое число, то это кольцо будет телом.

Последним понятием, о котором мне хотелось бы сказать несколько слов, прежде чем перейти к заключению, и которое хотя и принадлежит к области современной алгебры, но в то же время является в известной степени ответвлением элементарной геометрии, служит понятие **векторного пространства**. Понятие векторного пространства есть в сущности перевод на алгебраический язык основных свойств свободных векторов в элементарной геометрии.

Рассмотрим множество свободных векторов обычной геометрии и дополним его множеством чисел (скалярных величин), которые образуют тело действительных чисел. Прежде всего на множестве векторов мы имеем чрезвычайно простой закон композиции, которым является сложение векторов. Мы умеем складывать векторы и знаем свойства этой операции. Они таковы, что мы имеем право назвать их абелевой группой. С другой стороны, мы имеем закон композиции, которым определяется операция между вектором и элементом нашего поля действительных чисел, — это есть умножение вектора \vec{x} на некоторый скаляр α , т. е. $\alpha\vec{x}$, которое обладает следующими интересными свойствами:

$$1^0 \quad \vec{x} = \vec{x},$$

$$2^0 \quad \alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x},$$

$$3^0 \quad \alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}, \quad (\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}.$$

По существу, вся неметрическая векторная алгебра заключается в том, что по отношению к сложению векторов мы имеем абелеву группу и что $\alpha\vec{x}$ обладает вышеуказанными свойствами. Все остальное будет самоочевидными следствиями.

Я не думаю, что понятие векторного пространства можно было бы полностью включить в элементарное преподавание, но когда изучают векторное исчисление, то я спрашиваю: разве нельзя сделать очевидной фундаментальную роль системы аксиом и — что было бы наиболее интересным — выделить два закона композиции — сложение векторов и умножение вектора на скаляр, которые суть законы аффинной геометрии, соответствующие более частной

структуре, т. е. евклидову векторному пространству, куда вместе со скалярным произведением вводятся метрические свойства.

Перед заключением я хотел бы сделать еще несколько замечаний. В нашем преподавании до известной степени смешаны различные исторические стадии. В нем сохранились не очень интересные пережитки прошлого. Я думаю, например, о понятии годографа в механике. Существует целая серия таких понятий, которые еще не исчезли, хотя они уже сыграли свою историческую роль. Я давно уже борюсь с понятием годографа. В известный момент годограф был полезен, когда еще не сложилось понятие свободного вектора. С того момента, как были введены свободные векторы, понятию годографа нет места в преподавании. Существует целый ряд понятий, которыми еще пользуются, когда по существу они недопустимы, так как этим нарушается равновесие в преподавании. Я хочу также заметить, что, может, было бы интересно не пользоваться классической системой косоугольных координат. Если известно векторное исчисление, то можно использовать в качестве репера совокупность точки и трех векторов, что является единственно нужным геометрическим элементом.

В том же порядке идей я думаю, что было бы целесообразно еще дальше развить векторное исчисление, чтобы ввести в него понятие матрицы и, когда это понятие будет усвоено, использовать его при замене репера, в чем уже не будет ничего удивительного. Я думаю, что более удивительным будет вывод тригонометрических формул сложения. Вывод этих формул можно сделать вполне естественно, не прибегая к построению сложных фигур. Это есть простой вариант классического доказательства, но, по моему, более естественный. Я рассматриваю два единичных взаимно перпендикулярных вектора \vec{i} и \vec{j} и поворот этих векторов на угол Θ_1 . Непосредственно очевидно, что

$$\begin{aligned}\vec{i}_1 &= \vec{i} \cos \Theta_1 + \vec{j} \sin \Theta_1, \\ \vec{j}_1 &= -\vec{i} \sin \Theta_1 + \vec{j} \cos \Theta_1,\end{aligned}$$

где вторая формула получена из первой заменой пары (\vec{i}, \vec{j}) на пару $(\vec{j}, -\vec{i})$.

По существу, классическое доказательство прибегает к различным видам формализма. Я же считаю полезным использовать только что рассмотренный формализм — взять за начальные векторы \vec{i}_1 и \vec{j}_1 и получить векторы \vec{i}_2 и \vec{j}_2 путем поворота на угол Θ_2 . Ясно, что те же векторы \vec{i}_2 и \vec{j}_2 можно получить из векторов \vec{i} и \vec{j} поворотом на угол $(\Theta_1 + \Theta_2)$. Подставляя в выражения \vec{i}_2 через \vec{i}_1 и \vec{j}_1 значения этих векторов, получим формулы для $\cos (\Theta_1 + \Theta_2)$ и $\sin (\Theta_1 + \Theta_2)$.

В своей сущности этот метод не отличается от общеупотребительного. Это просто алгебраические операции над соответствующими векторами. Но здесь является первый пример, хотя и не вполне очевидный с первого взгляда, — умножения матриц, так как это является по существу умножением матриц с четырьмя элементами. Мне кажется, что это и есть тот вид примера, который можно употреблять. Я считаю, что в элементарном преподавании нельзя использовать большое число алгебраических понятий, но можно на них указывать. Можно думать, что если у самого преподавателя сохранились в памяти различные понятия с их основными свойствами, то существует возможность, что они войдут и в сознание учащихся и оставят там некоторый след, а это избавит учащихся от многих затруднений в дальнейшем, так как конечной целью нашего преподавания является сделать учащихся причастными к тому, что составляет сущность науки¹.

¹ Текст этой главы был подготовлен для конференции, происходившей в Педагогическом музее в Париже 26 марта 1953 г.

Глава V.

О ПРЕПОДАВАНИИ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ.

Густав Шоке.

Введение.

Уже в течение нескольких лет отмечались возрастающие затруднения у тех, кто преподает элементарную геометрию. Каждый понимает, что не все благополучно в учебниках и традициях, которыми мы обязаны прошлому.

В частности, все, кто пробовал преподавать начала элементарной геометрии, испытали известное затруднение, когда они хотели уточнить самые исходные положения. Никакие учебники не могли им помочь в этом отношении.

Элементарная геометрия есть прекрасное путешествие, но начало его часто теряется в тени сомнений, а последующая дорога проходит через такие дебри перемещений и ориентаций, что у прошедшего по ней остается ощущение перенесенной пытки.

Удивительно, до какой степени все теоретические открытия последних веков имели мало влияния на преподавание элементарной геометрии. В то время когда мы обладаем всеми элементами для построения научной системы, стройной и простой, и имеем такие открытия, как открытия Гильберта, полностью объясняющие сущность и роль основных аксиом, школьные учебники остаются большей частью на уровне «Начал» Евклида в том виде, как он излагал их более 2000 лет тому назад.

В этом, вероятно, мы можем видеть влияние слишком жестких программ. Сообразоваться с буквой и духом программ является для автора учебника необходимой предпосылкой, которая ему затемняет более существенные проблемы.

Частичным выходом из этого положения было бы предоставление возможности в определенных классах, например элементарной математики, организации свободного сектора, где было бы позволено преподавателю объяснить данный вопрос по его собственному выбору.

По этому поводу можно заметить, что за границей, где программы бывают часто не такие жесткие, как во Франции, мы находим

наиболее интересные попытки нового преподавания элементарной геометрии¹.

Но я не хочу, чтобы плохо поняли смысл этих замечаний. Я, конечно, не рассматриваю как возможное или даже как желательное предоставление молодым ученикам, например 14 лет, аксиоматически строгого курса геометрии. Только сам преподаватель должен понять, каким должен быть этот курс, и он же должен знать, какие определения будут наилучшими и какой логический порядок должен быть принят.

Он принорочит тогда свое преподавание к возрасту и уровню своих учеников. Важно то, что существует система определений, причем не более, а иногда даже менее трудно использовать хорошие определения, чем плохие. Одной из обязанностей преподавателя является необходимость вложить в свою работу хорошее содержание, все более и более уточняя его, но он не будет иметь никакого шанса на успех, если он сделает из этой работы карикатуру. Продолжая это изложение, я хотел бы показать, как можно, оставаясь очень близким к чувственному эксперименту ребенка, осуществить преподавание элементарной классической геометрии. Я войду в некоторые детали первых теорем, чтобы сделать более осязаемым то, что может остаться строгим, используя только элементарные средства. Моей целью не является дать преимущество какому-нибудь аксиоматическому обучению перед другим. Право же я буду рассматривать свою цель достигнутой, если мой читатель, не удовлетворенный моим выбором основных аксиом, попытается придумать другие. Он откроет тогда, что применение правил в математических работах есть очень приятное упражнение для ума, создание же и критическое испытание новых правил не только принесет ему удовлетворение новым порядком, но поможет ему, когда он возвратится к классическим правилам, понять более ясно строение геометрии. Из потребителя он делается конструктором и скоро заметит, что, когда построишь сам мотор, как бы несовершенен он ни был, гораздо лучше поймешь работу других.

I. Критический разбор учебников.

Я формулировал выше довольно туманные критические замечания, относящиеся к содержанию некоторых учебников. Я считаю нужным войти теперь в некоторые детали для того, чтобы лучше видеть подводные камни, наиболее часто встречающиеся. Здесь мы будем касаться только учебников геометрии классов второго, первого и элементарной математики (от 15 до 18 лет приблизительно). [15]

¹ См. например, Г. Б. Хальстед «Рациональная геометрия», Готье-Вильяр, 1911. (G. B. Halsted, Rational Geometry, New-York, 1907.)

Мы оставим в стороне учебники, в которых основания имеют конкретный характер. В них очень много говорят о шелковой нитке, о кальке и т. д. Все там очень заботливо вычерчено, фигуры очень выразительны, важные результаты заключены в рамки. Их девиз — «Как понять геометрию с помощью листа бумаги и ножниц». Они не претендуют на построение дедуктивного курса геометрии: их стремление заключается в сообщении ученику знания определенного числа свойств обычных фигур, делая их очевидными или прибегая к опыту, полученному из реального мира, и к частным суждениям.

Мы не разбираем сейчас вопрос, уместны ли эти учебники во втором или первом классе. Заметим только, что при ограниченных возможностях авторов их достижения бывают иногда достаточно полными.

Одна из причин, по которой я не могу считать их совершенными, есть та, что обычно постулат Евклида поднят у них на высоту с почти религиозным поклонением и к тому же совершенно непонятным, потому что известно, что этот постулат можно заменить одной из следующих аксиом, гораздо более полезных в геометрии «бумага — ножницы», чем постулат Евклида.

«Существует по крайней мере один квадрат (четыреугольник с равными сторонами и с прямыми углами)», или еще: «Всякий четырехугольник содержится в треугольнике», или даже: «Две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой»*.

Аксиомы и постулаты.

Но большая часть преподавателей не довольствуется таким интуитивным изложением и желает обосновывать по мере возможности первые шаги в области геометрии. В их книгах находят вполне ясные предложения, обозначенные под именем аксиом или постулатов.

В лучших из этих книг роль аксиом корректно объяснена и имеется вполне определенное число таких аксиом; между тем удивительно то, что вместо избыточной системы аксиом, что было бы совершенно извинительно и даже в какой-то мере допустимо, эти аксиомы фигурируют в недостаточном числе. Например, отсутствует часто аксиома, устанавливающая возможность вращения фигуры вокруг прямой. А очень часто сам автор не имеет ясного понятия, что из себя представляют аксиомы. Вот пример пояснения об аксиомах и постулатах:

* Подробный анализ этих предложений показывает, что каждое из них может быть принято в качестве аксиомы параллельности. Подробнее об этом можно прочитать в любом учебнике по основаниям геометрии.

«Аксиома есть предложение само собою очевидное». Например, два количества, равные третьему, равны между собою. «Постулат есть предложение, которое мы допускаем без доказательства».

Молчание кажется предпочтительнее такому объяснению, которое рискует надолго затемнить ум ученика.

У другого автора находят непростительную путаницу между понятием математической истины и применением математики в физическом мире: он различает очевидные свойства и свойства не очевидные, но которые... «все же являющиеся истинными, потому что они подтверждаются опытом и следствиями, получаемыми из них».

Такое верное предложение, но которое нельзя доказать, называется постулатом».

Тот же самый автор, выразив аксиому «между двумя точками можно провести прямую и притом только одну», комментирует ее таким образом: «Мы будем говорить, что это есть свойство, **характерное** для прямой. Это значит, что из всех линий только прямая обладает этим свойством».

Непонятно, зачем тогда будут нужны другие аксиомы, если эта является характерной! [16]

Конечно, мы не должны преуменьшать трудности, которые испытывают, когда хотят объяснить роль аксиомы ученику, геометрические понятия которого не совсем еще освободились от его чувственного эксперимента и который, имея дело с одной классической геометрией, не может дать себе отчета, что правила этой геометрии не абсолютны и что можно выбрать другие, вполне разумные и так же хорошо приложимые к чувственному миру.

Роль аксиом может быть иллюстрирована различными методами применительно к умственному возрасту учащегося. Разве нельзя, например, предоставить ему следующие предложения:

«Мы будем говорить о серии новых предметов, хотя и имеющих уже общепринятые названия: точки, прямые, окружности. Мы о них ничего не знаем. До новых информаций их свойства, даже самые простые, нам неизвестны. Это будет как бы игра. Нам дадут применительно к этим предметам ряд указаний. Их снабдят свойствами, которые их обрисуют, по крайней мере частично, и ваше участие в игре будет состоять в том, чтобы открыть, каким будет поведение этих предметов при данных обстоятельствах».

Такое положение будет иметь некоторую аналогию с положением, выдвигаемым в хорошем детективном романе. Автор вводит вначале определенное число предметов: мужчин или женщин, H_1, H_2, \dots, H_m , места L_1, L_2, \dots, L_n , времена T_1, \dots, T_p . Первая часть его книги посвящена их введению, т. е., другими словами, объяснению определенного числа отношений, существующих между H, L и T . Во второй части он ставит проблему, например, в следующей форме: какое значение нужно дать неизвестному x , чтобы новое данное отношение $f(H_i, L_j, T_k, X)$ можно было бы вывести из начальных отношений, данных в первой части.

Логически роман может на этом остановиться и предоставить читателю дальнейшее действие. В действительности он почти всегда имеет третью часть, где автор (или тот, от лица которого ведется рассказ) предлагает дать свое собственное решение. Тогда обычно замечают, что система начальных отношений бывает недостаточной. И чтобы устранить неопределенность, автор вводит в последний момент дополнительное отношение, которое совершенно разрешает проблему, т. е. позволяет вполне определить x .

Но это уже неважно и читатель вполне удовлетворен. Он будет гораздо менее удовлетворен, если система начальных отношений, назовем их аксиомами, будет противоречива. Это будет в том случае, если начальные отношения приводят к утверждению, что x , который должен быть единственным, идентичен сразу и с H_1 и с H_2 , которые между собою различны. Тогда мы находимся перед лицом неумелого или недобросовестного автора. Интерес к игре пропадает.

Когда мы будем играть в элементарную геометрию, то надеемся быть достаточно счастливыми, чтобы наш выбор начальных отношений не был бы противоречивым. [17]

Некоторые случаи ошибок.

Предположим пройденным опасный этап частичного, полного или сверххобильного введения аксиом. Положение тогда представится таким. Достигнуто тем или иным способом обладание известным числом предложений, рассматриваемых как верные и в принципе вполне достаточные для того, чтобы строго изложить остающийся раздел планиметрии.

Казалось бы, что эта конструкция должна теперь осуществляться без задержки. Ничего подобного: случай равенства треугольников, теория перемещений, ориентация фигур и позднее измерение величин (например, углов) придадут двусмысленность определениям и блестящие возможности появиться псевдотеоремам.

Равенство фигур — перемещения.

Психологу и историку предоставляется возможность объяснить живучесть лишенных смысла, почти универсально используемых определений, как, например, в теории перемещений. Их авторы слишком явно забыли, что определение не должно использовать термины, не определенные предварительно или более точно: что единственные термины, которые не нуждаются в определении, это те, которые фигурируют в аксиомах, но что все другие должны быть определены более или менее точно, исходя от этих первоначальных терминов.

Вот некоторые примеры этих определений.

Равенство двух фигур. «Говорят, что две фигуры будут равны, когда они допускают наложение одной на другую. Это значит,

что можно перенести одну на другую таким образом, что осуществится полное совпадение».

Не только термины «налагаемые, переносить, совпадение» нигде не определены в другом месте, но это определение в целом вносит неправильное представление о равенстве двух фигур и их наложении одна на другую путем непрерывного перемещения.

Вот еще другое, более опасное, потому что оно ведет к неправильным следствиям:

«Если две плоские фигуры таковы, что трем произвольным точкам A, B, C первой соответствуют всегда три точки A', B', C' второй, определяя треугольник, равный треугольнику ABC , то они равны».

Не будем настаивать на том, что равенство треугольников не было определено. Заметим только, что это определение значило бы, что всякая фигура E , содержащаяся в фигуре E' , будет всегда ей равна.

Источник затруднений не всегда заключается в столь очевидных промахах. Они скрываются иногда в терминах, рассматриваемых в общем как очевидные.

Возьмем, например, слово «треугольник». Это — иногда фигура, образуемая тремя прямыми, иногда фигура, образуемая тремя отрезками AB, BC, CA ; но может произойти, что в предложении подразумевают прямо и без предупреждения, что дело идет о совокупности трех вершин. Может быть, здесь же заключается опасность слова «фигура». В уме человека, применяющего его, оно не обозначает точно совокупность точек, но относит к некоторому определенному минимальному множеству все то, что может быть получено отсюда точным построением: например, высоты треугольника рассматриваются как принадлежащие треугольнику.

Чтобы избежать подобной опасности, мы систематически избегаем слова «фигура» и используем вместо него слово «совокупность».

Я закончу тем, что покажу, как можно получить курьезные теоремы, если мы примем такие определения, как те, что мы только что критиковали.

Теорема (!) Пусть ABC — сферический треугольник, $A' B' C'$ — плоский треугольник. Для того чтобы треугольники были равны, необходимо и достаточно, чтобы их стороны были попарно равны

$$(AB = A'B'; \quad BC = B'C'; \quad CA = C'A'). \quad [18]$$

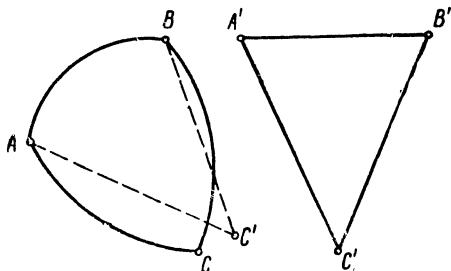


Рис. 1.

Доказательство: 1. Если треугольники равны, то их стороны, очевидно, будут попарно равны.

2. Обратно, предположим (рис. 1), что $AB=A'B'$, $BC=B'C'$, $CA=C'A'$. Произведем перемещение так, чтобы A совпала с A' , B с B' , что является возможным, потому что $AB=A'B'$. Если C и C' находятся по разные стороны от AB , то симметрией (или поворотом) относительно AB приводим C' по ту же сторону, что и C . Предположим, что мы имеем этот последний случай. Я говорю, что C и C' будут тогда совпадать. В противном случае, рассмотрим единственную ось симметрии C и C' . Она содержит A и B , потому что $AC=AC'$ и $BC=BC'$; значит, она совпадает с AB , что невозможно, потому что тогда C и C' были бы по разные стороны от AB .

Ориентация фигур.

Мы не будем подробно разбирать теорию ориентации, всегда основанную на интуитивных соображениях и вводящую наблюдения вне плоскости.

Кажется, что авторы учебников признали раз и навсегда невозможность корректного математического определения ориентации.

Вот, например, приблизительно одно из лучших определений перемещения, которые я мог найти в учебниках: «Фигуры F и F' могут быть получены одна из другой путем перемещения, если существует взаимно однозначное соотношение между F и F' , такое, что если A, B — две какие-то точки F , то будем иметь $A'B'=AB$, и если A, B, C три произвольные точки F , то ориентированные углы \widehat{ACB} и $\widehat{A'C'B'}$ будут равны». Понятие ориентации предварительно определено обычным методом, т. е. используя фиктивное наблюдение. Они, безусловно, правы, если мы заметим, что понятие ориентации опирается на структуру множества плоских изометрий и что его определение требует недвусмысленного определения равенства и перемещения.

Использование этого наивного определения оказывается настолько основательным, что у многих авторов равенство ориентированных углов всегда предшествует прямому равенству фигур.

Выбор системы аксиом.

Существует только одна система аксиом, которая позволит установить сущность классической геометрии. [19]

Гильбертова аксиоматика.

Гильберт — первый, кто открыл явные и неявные аксиомы, составлявшие основу евклидовой геометрии. Что такое изложение можно сделать элементарным, было пространно доказано Халь-

стедом в его небольшой книге «Рациональная геометрия». [20] Аксиомы разделены там на 4 группы: восемь аксиом сочетания, четыре аксиомы порядка, шесть аксиом конгруэнтности и, наконец, аксиома параллельности. Аксиома Архимеда и аксиома непрерывности имеют особое место и никоим образом не являются существенными по крайней мере в начале геометрии.

Таким образом, геометрия Евклида в совершенном виде опирается на 19 аксиом. Конечно, число аксиом довольно внушительно, но можно надеяться, что эти аксиомы будут сгруппированы около интуитивных понятий, настолько простых, что их необходимость обнаружится очень ясно.

Это имеет место для большинства аксиом сочетания, трех аксиом порядка, относящихся к порядку на прямой, и трех аксиом конгруэнтности, касающихся конгруэнтности отрезков прямой.

Но уже надо думать, что аксиома Паша, касающаяся пересечения прямой со сторонами треугольника, дает пример введения слишком сложной фигуры и говорит о свойствах, мало используемых в дальнейшем.

Одним из ее существенных следствий является то, что всякая прямая делит плоскость на две однозначно определяемые части. Нехорошо только то, что это следствие выражено более просто и пользуется фигурой более простой, чем сама аксиома.

Ученику гораздо более очевидным кажется деление плоскости прямою, чем аксиома Паша.

Предложения становятся еще более сложными, когда приходят к аксиомам конгруэнтности. Конгруэнтность углов не определяется непосредственно из конгруэнтности отрезков, она является вначале существенным отношением эквивалентности в совокупности углов. Потом непосредственная связь между конгруэнтностью отрезков и конгруэнтностью углов обеспечивается следующей аксиомой. «Если для двух треугольников $ABC, A'B'C'$ имеем конгруэнтности $AB = A'B'$; $AC = A'C'$; угол $BAC =$ углу $B'A'C'$, то всегда будет иметь место также две конгруэнтности: угол $ABC =$ углу $A'B'C'$, угол $ACB =$ углу $A'C'B'$ ».

Этим утверждается, что мы допускаем часть условия для одного из классических случаев равенства треугольников. Выбор этой части кажется довольно произвольным. Надо доказать тогда вторую часть классического выражения, т. е., другими словами, что при тех же самых условиях мы будем иметь также $BC = B'C'$. Юному учащемуся это может показаться излишним.

Положение остается, очевидно, таким же, если мы заменим эту аксиому другим предложением — полностью или частично — классическим случаем равенства треугольников.

Если мы не хотим дать ученику впечатление, что математика есть пустая забава, где допускаются с самого начала сложные свойства, из которых потом выводят свойства более простые, надо, чтобы наши аксиомы имели бы простые выражения, использующие только понятия, к которым ученик уже привык, которые были бы

непосредственно переносимы в его чувственный опыт и которые в то же время были бы эффективными, т. е. позволяющими быстро установить довольно существенные свойства.

По этой самой причине мы отбрасываем, как плохо применимые в преподавании элементарной геометрии, всякое изложение евклидовой геометрии, опирающееся на проективную геометрию, а также, несмотря на его изящество, аксиоматическое изложение, основанное на свойствах группы движений, при котором равенство отрезков определяется при помощи отношений этой группы.

Плоскость, рассматриваемая как абстрактное пространство.

Если бы мы стремились только к скорости и простоте изложения, то лучшим определением плоскости и пространства было бы определение, выведенное из структуры абстрактного пространства. [21]

Сделаем беглый набросок начал такой геометрии, чтобы потом получить отсюда критические выводы.

Если x, y, z суть какие-то действительные числа, то трехмерное пространство R^3 будет определено как совокупность всех троек (x, y, z) .

Плоскостью называется совокупность троек, удовлетворяющих условию: $ax + by + cz = d$, где a, b, c не равны нулю одновременно. Прямая будет определена как предполагаемое не пустым пересечение двух различных плоскостей, или как множество точек:

$$x = at + \beta,$$

$$y = a''t + \beta', \quad 0 < t < \infty$$

$$z = a'''t + \beta'', \quad a, a', a'' \text{ не равны } 0 \text{ одновременно.}$$

На этой стадии мы имеем уже довольно богатую геометрию и можно даже заметить, что нет необходимости брать за x, y, z, a, b, c, d произвольные действительные числа. Можно предположить, что эти элементы взяты в произвольном подмножестве K от R (например, тело рациональных чисел).

Далее определяем понятие вектора, линейного преобразования, замену осей, одним словом, строим аффинную геометрию, ассоциированную с векторным пространством R^3 .

Если мы допустим теперь, что этому телу вместе с каждым его элементом $a \geq 0$ принадлежит и его квадратный корень¹ \sqrt{a} , то наша геометрия может обогатиться введением понятия расстояния $d(M_1M_2) \geq 0$ между двумя точками M_1 и M_2 :

$$d^2(M_1M_2) = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2].$$

Эта функция двух точек обладает следующими свойствами, важными при изучении метрического пространства:

¹ В действительности, достаточно предположить, что если $a \in K$ и $b \in K$, то имеем также $\sqrt{a^2 + b^2} \in K$.

$$d(M_1 M_2) = d(M_2 M_1),$$

$$d(M_1 M_2) = 0 \text{ эквивалентно } M_1 = M_2.$$

$d(M_1 M_2) \leq d(M_1 M_3) + d(M_3 M_2)$ неравенство будет строгим, если точки M_1, M_2, M_3 не расположены на одной прямой.

Это позволяет уже теперь рассмотреть перпендикулярность двух прямых: пусть $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ — направляющие параметры прямых; говорят, что прямые перпендикулярны (\perp), если

$$\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 = 0.$$

Но особенно важно то, что мы можем определить изометрию. Пусть F и F' — два подмножества пространства; взаимно однозначное соответствие $M' = \varphi(M)$ между F и F' называется изометрией, если для каждой пары точек A и B из F будем иметь:

$$d(\varphi(A), \varphi(B)) = d(AB).$$

Можно доказать, например, что две произвольные прямые изометричны (и, в частности, изометричны с осью xx' , которая в свою очередь изометрична с телом K) и то же самое — по отношению к двум плоскостям. И обратно: всякое множество, изометричное прямой (соотв. плоскости), есть тоже прямая (соотв. плоскость).

Отсюда следует важная теорема: Всякая изометрия между двумя множествами F и F' может быть продолжена на изометрию пространства R^3 на самого себя. Это продолжение единственно, если F содержит по крайней мере 4 некомпланарные точки. Имеется два таких продолжения, если F расположено в одной плоскости и содержит по крайней мере три точки, не лежащие на одной и той же прямой». [22]

Эта теорема позволяет ввести знаки $(+)$ и $(-)$ в каждой изометрии между двумя не плоскими фигурами F и F' . Действительно, если $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ суть векторы, полученные преобразованием из единичных векторов осей xx', yy', zz' в изометрии всего пространства, являющейся продолжением изометрии между F и F' , то определитель их компонент равен или $+1$, или -1 . Знак этого определителя принимается за знак изометрии между F и F' ,

Определитель произведения двух изометрий равен произведению определителей сомножителей, откуда мы получим, что прямые изометрии (со знаком $+$) образуют группу. Теперь мы уже можем определить **движения**.

Обобщим это: пусть дана тройка векторов с общей начальной точкой: V_1, V_2, V_3 , не параллельных и не лежащих в одной и той

же плоскости; говорят: ориентированный триэдр, который они определяют, есть положительный (соотв. отрицательный), если определитель, образуемый его компонентами, >0 (соотв. <0).

С наименьшей легкостью определяется скалярное произведение векторов, их векторное произведение и т. д.

Критический обзор этой геометрии.

Мы дали довольно детальный очерк «аналитического» представления геометрии, во-первых, потому, что, по нашему мнению, на определенной стадии он может быть использован в преподавании, а во-вторых, потому, что многие выдающиеся математики считают, что здесь мы имеем один из способов изложения элементарной геометрии. По этой же причине мы хотим сделать довольно основательный критический обзор.

Нет необходимости указывать, какие большие возможности мы получаем, используя это преобразование пространства. Этим путем могут быть введены наиболее тонкие понятия геометрии и формальные методы, лежащие в основе этого процесса, дают могущественное средство для дальнейшего развития, так как мы получаем аналитическую геометрию. Эти возможности обусловлены тем, что мы, исходя из некоторых основных понятий, используем с самого начала весьма сильные средства, каковыми являются: числовая прямая, абстрактное пространство, квадратичная форма $(x^2 + y^2 + z^2)$, сопряженная с бинарной формой $(xx' + yy' + zz')$, и т. д.

Другое важное преимущество: эта конструкция геометрии не является аксиоматическим построением. В ней мы встречаемся с определениями, в которых используется только лишь понятие действительного числа. На самом же деле подразумевается вся аксиоматика, лежащая в основе определения действительных чисел. Но если мы вспомним, что действительная прямая построена на понятии совокупности целых чисел путем введения промежуточной совокупности рациональных чисел [23] и что сама совокупность целых чисел построена на нескольких основных аксиомах теории множеств, то мы убедимся, что получили определение пространства с минимальным числом промежуточных этапов — аксиоматическую базу, наиболее солидную, так как она приближается к базе самой теории множеств.

Еще преимущество: использованный процесс открывает путь многочисленным обобщениям.

а) **Определение R^n** — евклидово пространство n измерений. Вмesto того чтобы рассматривать тройки (x, y, z) или лучше (x_1, x_2, x_3) , возьмем упорядоченные последовательности n действительных чисел (x_1, x_2, \dots, x_n) .

б) **Определение C^n** . То обстоятельство, что все x_i суть числа действительные, применяется довольно редко в большей части тео-

рий: действительную прямую или тело K можно заменить телом комплексных чисел (или также каким-нибудь другим телом). Таким образом, приходят к обобщению евклидова пространства посредством мнимых точек, что имеет значение для интерпретации даже очень простых свойств этого пространства.

с) Определение проективных пространств действительных или комплексных и т. д.

Вот действительно существенные аргументы в защиту этого представления евклидовой плоскости, и мне кажется, что это будет наилучшее представление при обращении к умам, уже развитым, имеющим довольно большой математический и геометрический опыт. Уже в классе специальной математики (класс подготовительный к высшей школе) этот метод представления имеет преимущества хотя бы в своей строгости и своей элегантности. На этом этапе ученик знает уже определенно, что плоскость и пространство могут быть отнесены к системе прямоугольных осей, и он уже достаточно оперировал с этим в аналитической геометрии, чтобы определение плоскости, сферы, скалярного произведения векторов и т. д., которые ему дадут, не показались бы бесплодной игрой.

Если наше физическое пространство ориентировано в трех перпендикулярных направлениях, то нет сомнения, что можно было бы надлежащим образом ввести его математическую модель как пространство троек (x, y, z) . К сожалению, это не так. Наше пространство довольно определенно ориентировано благодаря наличию тяжести, но эта ориентировка недостаточная, и существование в зале пола и двух вертикальных прямоугольных стен недостаточно, чтобы дать ему удовлетворительную ориентацию.

Если мы ограничимся изучением плоскости, положение несколько улучшится, потому что современный мир нам представляет для изучения плоских поверхностей, ориентируемых в двух направлениях, клетчатую бумагу, графики и т. д.

Предположим даже, что мы достигли понятия плоскости и пространства при помощи координат. Осталось сделать самый трудный шаг.

Давая двум направлениям плоскости привилегированную роль, мы уничтожили ее изотропность. Наклонные прямые теряют свое значение, можно во всех случаях сомневаться, что они будут играть ту же самую роль, что и параллельные к осям.

Ввести на этой стадии теорему Пифагора, чтобы вновь установить эту изотропность, есть процесс грубый и неприемлемый. Эта фундаментальная, но совершенно не очевидная теорема должна появиться как существенное свойство, открытое на основе более элементарных свойств, а не как аксиома или определение.

Конечно, можно ввести квадратичную форму $(x^2 + y^2 + z^2)$ через канал линейных форм, потом форм билинейных и, наконец, скалярного произведения. Но понятия равенства расстояний, прямой линии, перемещения, такие интуитивные и фундаментальные понятия будут таким образом принесены в жертву!

Мы не имеем там приемлемой для ума геометрии, осуществляемой в физическом мире, но геометрию, предназначенную для чистого разума, без контакта с физической реальностью.

Первый пример аксиоматики, связанной с совокупностью инструментов.

Если мы хотим дать геометрии базу не только логически корректную, что было бы недостаточно, но довольно близкую к чувственному эксперименту каждого из нас, мы должны на одно мгновение сделать усилие и забыть все, что мы знаем о свойствах плоскости и пространства и даже о понятиях прямой, окружности, сферы, которые мы хотим туда включить.

Другими словами, поставим себя в положение ищущего ума, пытающегося избавиться от различных встречающихся частных случаев и создать новое понятие, которое он еще не ясно различает.

Ограничимся изучением плоскости. Положение будет следующим:

Мы уже встречали куски плоскости: поверхность пруда, белый листок на столе и т. д. и, исходя из этого, мы можем даже представить такую поверхность безгранично продолжающуюся, т. е. без осязаемых границ.

С другой стороны, мы имеем определенные инструменты, острие или мел, чтобы обозначать точки, циркуль с постоянным или меняющимся раствором, линейку с одной или двумя параллельными сторонами, угольник и т. д.

Обладание известным числом этих инструментов позволит нам исследовать плоскость.

Пусть I — совокупность инструментов i_1, i_2, \dots, i_n , которыми мы располагаем. Она нам позволит сделать совокупность выводов, которые мы сгруппируем в небольшое число предложений. Конечно, мы не узаконим эти предложения для всех возможных случаев, но они узаконены во всех осуществляемых экспериментах, и, если мы достаточно варьировали данные эксперимента, мы имеем право заключить, что эти предложения правильны во всех случаях. Эти выражения составляют совокупность **a постулатов или аксиом**.

Каждый из них выражается в терминах, дающих возможность ввести скрыто или открыто инструменты i_1, \dots, i_n из I .

Можно, конечно, ввести термины, которые затемнят их роль, но всегда останется, что a тесно связано с I .

Было бы интересно найти влияние I на математиков Халдеи, а особенно Греции.

Не является случайностью, что тот, кого можно рассматривать как основателя проективной геометрии — Дезарг, был вначале превосходный техник и как умелый чертежник, хорошо владел линейкой: когда совокупность I ограничивается карандашом, чтобы обозначать точки на плоскости, и линейкой, чтобы проводить прямые, можно основать только проективную геометрию.

Попытаемся, например, увидеть, как будет осуществляться a , когда плоскость осуществляется плоской твердой поверхностью и когда I ограничивается карандашом, чтобы ставить точки на плоскости, и измерительным циркулем с концами ножек a и b , которые достаточно длинные, чтобы удовлетворять всему нашему опыту (гипотеза циркуля с малым раствором представляет тоже интерес). Этот циркуль должен к тому же рассматриваться только как инструмент перенесения расстояния. Его механизм не должен быть введен в дело.

Циркуль позволяет сравнивать пары точек A_1A_2 плоскости. Скажем, что две такие пары $AB, A'B'$ конгруэнтны ($A'B' \sim AB$), если, не изменяя раствора циркуля, можно заставить сначала совпасть A с a , B с b , потом A' с a , B' с b .

Повторные эксперименты приводят к первым предложениям a : Существует соотношение в совокупности пар AB точек плоскости: $AB \sim A'B'$, называемое конгруэнтностью, таким образом, что

- (1) $AB \sim AB$,
- (2) $(AB \sim A'B') \rightarrow (A'B' \sim AB)$,
- (3) $(AB \sim A'B') \text{ и } (A'B' \sim A''B'') \rightarrow (AB \sim A''B'')$,
- (4) $AB \sim BA$.

Три первых предложения показывают, что эта конгруэнтность есть отношение эквивалентности. Можно, таким образом, преобразовать совокупность пар AB в класс интервалов, в котором каждый будет называться «длина» каждого из его элементов AB или расстоянием между точками A и $B : d(AB)$.

Четвертое предложение означает, что $d(AB)$ тождественно $d(BA)$.

Введение этой длины позволит уже дать очень точные определения, которые упростят дальнейшие предложения.

Определение. Изометрией называют такое взаимно однозначное соответствие между двумя подмножествами E и E' плоскости, что две пары соответственных точек имеют одно и то же расстояние.

Можно было бы тогда уточнить интуитивное или экспериментальное утверждение, что плоскость изотропна или, более точно, что не только все точки будут равнозначны, но также и все направления вокруг каждой точки тоже будут равнозначны:

(5) Если $AB = A'B'$, то существует изометрия по крайней мере та, которая преобразует плоскость саму в себе и A в A' и B в B' .

Можно было бы здесь постулировать существование подгруппы изометрий плоскости на ней самой (перемещения) таким образом, что существует одна и только одна из этих ведущих изометрий, преобразующих AB и в $A'B'$. Но это было бы предложение, с трудом осуществимое при помощи наших инструментов. [24]

Мы приходим к открытию существования соотношения порядка между различными длинами. Нельзя думать, что для этого можно

использовать изменение угла циркуля, потому что этот последний должен являться для нас только переносителем расстояний.

Но эксперимент дает нам множество предложений, которые удобно выразить следующим определением:

«Если OA и $O'A'$ — две пары точек, то рассмотрим все пары OB , $O'B'$ такие, что $OA = OB$; $O'A' = O'B'$. Если для каждой точки B существует такая точка B' , что по меньшей мере $AB = A'B'$, то мы говорим, что $OA \leq O'A'$ ». [25]

Предложение (5) нас убеждает в том, что это соотношение остается действительным, если мы заменим OA и $O'A'$ парами конгруэнтными. Это будет соотношение между длинами. Запишем его:

$$d(OA) \leq d(O'A') \text{ или } l \leq l'.$$

Эксперимент дает нам предложения:

(6) Для l и l' произвольных по крайней мере одно из двух соотношений $l \leq l'$; $l' \leq l$ будет иметь место.

(7) $l \leq l$ (это есть результат определения соотношения \leq).

(8) Если $l \leq l'$ и $l' \leq l''$, имеем $l \leq l''$ (то же замечание).

(9) Если $l \leq l'$ и $l' \leq l$, имеем $l = l'$. Если $l \leq l'$ при $l = l'$ запишем, что $l < l'$.

Эти новые соотношения исчерпывающим образом выражают соотношения порядка.

Существование сложения длин и неравенства треугольника получим из следующего предложения:

(10) Даны две длины a и b и OA — пара точек таких, что $d(OA) = a$. Между всеми точками B , такими, что $d(AB) = b$, имеется B_0 и притом единственная¹, такая, что $d(OB) \leq d(OB_0)$ для каждого B . Так приходим к определению $d(OB_0) = (a + b)$.

Из предложения (5) мы получаем, что определение $(a + b)$ независимо от пары выбранных точек OA . Неравенство треугольника для каждой тройки (ABC) есть непосредственное следствие определения и существования суммы двух длин.

То же самое предложение (5) дает нам первую теорему, которую нам необходимо знать.

Теорема 1. Имеем всегда $a + b = b + a$.

Новое предложение:

(11) Если $b < b'$, имеем: $a + b < a + b'$ для всякого a ; позволяет всегда, используя предложение (5), доказать:

Теорема 2. Имеем всегда $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Критика этой аксиоматики и выбор других инструментов.

Мы остановим здесь развитие этой частичной аксиоматики; можно было бы теперь дать определение коллинеарности трех точек, потом ввести прямую как совокупность точек, расположенных на одной прямой с двумя данными точками, и т. д.

¹ Единственность не является необходимой до теоремы 1 включительно, но сильно упрощает следующую.

Заметим, что, если начала этой аксиоматики были просты и натуральны, вынужденные ограничения в формулировке предложений в терминах конгруэнтности — в силу единственности рабочего инструмента (циркуля) — быстро привели нас к довольно сложным определениям.

Вместе с тем нет сомнения в том, что, прибавляя еще несколько аксиом, мы могли бы получить аксиоматику, эквивалентную аксиоматике Гильберта.

Урок, который мы можем извлечь из этой попытки, заключается в том, что, если мы хотим приблизиться к аксиоматике простой и дающей большие результаты, надо увеличить нашу совокупность I используемых инструментов. Наша частичная неудача заключается в том, что мы не могли с самого начала ввести прямые. Действительно, они играют в евклидовой плоскости роль настолько же важную, какую играет конгруэнтность пар точек. Они действительно связаны с понятием конгруэнтности двумя основными фактами:

1. Каждая прямая обладает транзитивной группой изометрий (скольжения).

2. Всякая изометрия плоскости на нее саму, которая обладает больше, чем одной инвариантной точкой (симметрии), оставляет инвариантной всякую прямую; это соответствие между симметриями и прямыми взаимно однозначное [26]

Это замечание приводит нас к уточнению инструмента I , а потом к изменению направления линий нашего изложения.

Инструменты I . *a)* Плоскость, которую мы будем изучать, осуществляется плоским листом бумаги (на котором не изображено никакого знака), который может быть сложен. *b)* Как и в предыдущем примере, имеется карандаш и циркуль (без карандаша). Бесплезно добавлять сюда линейку, потому что из свойства листа складываться мы получим наряду с другими понятиями и прямые.

Построение аксиом a .

Как и в предыдущем случае, циркуль даст нам аксиомы конгруэнтности и совокупности пар точек плоскости и понятие длины отрезка. Но теперь мы ассоциируем всякому сгибанию плоскости совокупность ее неподвижных точек, которую мы будем называть «прямая».

Следующие предложения могут быть легко допущены:

Через две произвольные точки проходит прямая и притом только одна (единственность складывания при двух неподвижных точках).

На каждой прямой можно двумя способами выбрать направление.

Всякая прямая обладает транзитивной группой изометрий (имеется единственное скольжение, которое совмещает одну точку прямой с другой). Это скольжение легко дает понятие суммы двух длин.

Все прямые изометричны.

После складывания плоскость разделяется соответствующей прямой на две части так, что всякий отрезок прямой, соединяющий две точки, расположенные в двух различных частях, встречает эту прямую.

Эти предложения вводят почти исключительно соотношения, содержащие точки, лежащие на одной прямой. Сюда надо прибавить предложения, позволяющие изучать точки, не лежащие на одной прямой. Это неравенство треугольника, которое мы найдем, используя по-новому циркуль:

Каковы бы ни были точки A, B, C , имеем всегда

$$d(AC) \leq d(AB) + d(BC),$$

что соответствует не очень точному классическому выражению: «отрезок прямой есть наикратчайший путь от одной точки к другой».

Этой короткой схемы достаточно, чтобы показать, что имеется возможность начать изучение геометрии с изучения прямой. Это изучение позволит выработать удобный словарь и получить совокупность теорем, которые можно использовать в геометрии плоскости.

Когда в свою очередь плоскость будет достаточно изучена, можно переходить к определению пространства в терминах прямых и плоскостей.

Таким образом, мы начнем с тщательного изучения прямой, потом перейдем к изучению плоскости.

Мы надеемся на следующих страницах достаточно ясно показать происхождение аксиом, которые мы выбираем, чтобы читателю было легко найти в каждой из них ее интуитивное обоснование. [27]

Повторим последний раз, что все, что здесь изложено, написано для использования преподавателем и ни в коем случае не может служить началом учебника. Что это изложение может быть использовано в преподавании, я верю, но нужно было бы его переработать соответственно каждой ступени умственного развития.

II. Геометрия прямой.

Мы будем иногда использовать обозначения \in, \subset, \cup, \cap , которые удобны даже в элементарной геометрии и которые желательно было бы ввести и в преподавание.

$x \in A$ означает, что x есть элемент множества A .

$B \subset A$ означает, что B есть подмножество A

$A \cup B$ есть объединение A и B .

$A \cap B$ есть пересечение или общая часть A и B .

$(A - B)$ совокупность точек из A , которые не принадлежат B .

$x = y$ } элементы x и y (или множества A и B),

$A = B$ } тождественны.

I. Ориентированная прямая есть прежде всего вполне упорядоченное множество. Другими словами, прямая есть множество Δ точек, для которых дано двойное соотношение¹, которое мы обозначим $a < b$, обладающее следующими свойствами:

о₁) Какими бы ни были точки a и $b \in \Delta$, обязательно имеет место один из трех следующих случаев, которые взаимно исключают друг друга: $a < b$; $b < a$; $a = b$.

о₂) Если имеем: $a < b$ и $b < c$, то имеем также: $a < c$.

Определения. Если a, b, c суть три точки Δ , то говорят, что b находится между a и c , если имеем:

$$a < b < c \text{ или } c < b < a.$$

Совокупность точек, расположенных между двумя точками a, b , называется открытым интервалом с концами a, b и обозначается $]a, b[$. Если к открытому интервалу присоединить его концы, то получим замкнутый интервал $[a, b]$ ².

Легкие упражнения. 1. Если $]a, b[$ и $]a', b[$ тождественны и не пустые, то их концы тождественны в том же порядке. 2. Если a_1, a_2, \dots, a_n суть n различных точек ориентированной прямой, то существует одна и только одна перестановка p_1, p_2, \dots, p_n целых чисел $1, 2, \dots, n$, при которой $a_{p_1} < a_{p_2} < \dots < a_{p_n}$. 3. Пересечение конечного числа открытых интервалов (соотв. — замкнутых) будет пустым или открытым интервалом (соотв. — замкнутым). 4. Сумма конечного числа открытых интервалов (соотв. — замкнутых), имеющих попарно общие точки, есть интервал открытый (соотв. — замкнут).

Упражнения менее легкие. Если i_1, i_2, \dots, i_n суть интервалы открытые или замкнутые, имеющие попарно общие точки, то они имеют по крайней мере одну общую точку.

II. С другой стороны, существует в совокупности упорядоченных точек Δ соотношение эквивалентности, которое мы будем называть **конгруэнтность** и обозначать $(a, b) \sim (a', b')$. Другими словами, это соотношение будет удовлетворять аксиомам:

$$C_1) (a, b) \sim (a, b),$$

$$C_2) (a, b) \sim (a', b') \rightarrow (a', b') \sim (a, b),$$

$$C_3) (a, b) \sim (a', b') \text{ и } (a', b') \sim (a'', b'') \rightarrow (a, b) \sim (a'', b'').$$

¹ Двойное соотношение на Δ есть определенная функция множества упорядоченных пар (a, b) точек Δ , единственными качествами которых будут «истинно» или «ложно».

² Эти интервалы, следовательно, не ориентированы: имеем, например, $[a, b] = [b, a]$.

C_4 $(a, b) \sim (b, a)$. Эта аксиома позволяет заменить соотношение эквивалентности между упорядоченными парами (a, b) соотношением эквивалентности, отнесенным на совокупности замкнутых интервалов $[a, b]$ с различными концами.

Можно расширить это соотношение на совокупность всех замкнутых интервалов, рассматривая как эквивалентные все замкнутые интервалы, содержащие одну точку.

С этим соотношением эквивалентности можно сопоставить распределение множества замкнутых интервалов на классы по принципу их эквивалентности. Класс эквивалентности, содержащий как элемент замкнутый интервал $[a, b]$, будет называться **длиной** $[a, b]$ или еще **расстоянием** между a и b и тогда его обозначим $\delta(a, b)$. Здесь же необходимо отметить, что если $[a, b]$ и $[a', b']$ конгруэнтны, то их длины равны.

Когда $a = b$, говорят, что $\delta(a, b) = 0$.

Вот, наконец, две аксиомы, которые позволяют определить сложение на множестве длин.

C_5) Для каждой точки a и каждой данной длины $\delta \neq 0$ существуют две и только две точки b_1 и b_2 такие, что:

$$b_1 < a < b_2 \text{ и } \delta(a, b_1) = \delta(a, b_2) = \delta_0.$$

C_6) Если (a, b, c) и (a', b', c') две такие тройки, что b будет между a и c и что b' будет между a' и c' , то из соотношения $(a, b) \sim (a', b')$ и $(b, c) \sim (b', c')$ следует, что $(a, c) \sim (a', c')$.

Если даны две пары точек (a, b) и (b, c) , так что b лежит между a и c , то условимся писать:

$$(a, c) = (a, b) + (b, c).$$

Сложение здесь определяется только для частных пар; но несмотря на это, аксиомы C_5 и C_6 позволяют определить этим сложением на множестве L длин, так что, имея в виду предыдущее соглашение, получим.

$$\delta[(a, b) + (b, c)] = \delta(a, b) + \delta(b, c).$$

Из аксиом C_5 и C_6 легко видеть, что это сложение обладает следующими свойствами:

коммутативностью: $\delta_1 + \delta_2 = \delta_2 + \delta_1$;

ассоциативностью: $(\delta_1 + \delta_2) + \delta_3 = \delta_1 + (\delta_2 + \delta_3)$;

регулярностью: если $\delta_1 + \delta_2 = \delta_1 + \delta_3$, то $\delta_2 = \delta_3$.

Структура общего порядка Δ определяет на L такую же структуру, для которой L имеет наименьшим элементом 0. Эта структура при сопоставлении со сложением дает новые законы: соотношение $\delta_1 < \delta_2$ влечет за собой $\delta_1 + \delta_3 < \delta_2 + \delta_3$ для всякого δ_3 .

И, наконец, соотношение $\delta_1 < \delta_2$ эквивалентно предположению, что существует такое δ_3 , что $\delta_2 = \delta_1 + \delta_3$.

Обозначим через ω некоторую точку Δ . Из C_6 следует, что для всякого a из Δ существует точка a' и притом одна, так что ω будет между a и a' и что $\delta(a\omega) = \delta(\omega a')$.

Говорят, что a' противоположна a . Положительным называют всякое a , когда $a > \omega$, и отрицательным, когда $a < \omega$.

Мы определим сложение на Δ следующими соглашениями:

Если a и b суть два какие-то элемента из Δ , то обозначим через $(a + b)$ элемент c такой, что, с одной стороны, $\delta(b, c) = \delta(\omega, a)$ и, с другой стороны:

$$b < c, \text{ если } \omega < a,$$

$$b > c, \text{ если } \omega > a,$$

$$b = c, \text{ если } \omega = a.$$

Легко установить, что если a и b оба положительны или оба отрицательны, то имеем:

$$\delta(\omega, a + b) = \delta(\omega, a) + \delta(\omega, b).$$

Это сложение определяет на Δ структуру коммутативной группы, соединенной со структурой порядка.

Обратно, каждое вообще упорядоченное множество, дополненное структурой коммутативной группы, сложение которой совместимо с этой структурой порядка, можно, очевидно, единственным образом ассоциировать с ориентированной прямой, условившись считать, что

$$(a, b) \sim (a' b') \iff (b - a) = (b' - a') \text{ или } (a' - b').$$

Пример ориентированной прямой. Совокупность N целых чисел, положительных или отрицательных с отношениями порядка и обычной длины.

Наиболее важным примером ориентированной прямой является действительная прямая R . Чтобы ее построить, определяют вначале рациональную прямую Q и дополняют последнюю иррациональными числами. Ее значение в геометрии вытекает из свойств, данных в упражнениях 4 и 5.

Упражнение. 1. Пусть Δ множество упорядоченных троек действительных чисел $\{a, b, c\}$, причем упорядоченных лексикографически. Найти определение конгруэнтности в множестве пар Δ , при которой Δ становится прямой. [28]

2. Более обще: дано некоторое упорядоченное множество и Δ — множество функций $f(i)$ с действительными значениями, определенными на I , так что множество всех i , у которых $f(i) \neq 0$, будет вполне упорядоченным¹.

¹ Множество вообще упорядоченное I называют вполне упорядоченным, если все подмножества I обладают первым элементом.

Определить на Δ структуру ориентированных прямых.

3. Всякая изометрия $m' = \varphi(m)$ ориентированной прямой на нее самое (т. е. взаимно однозначное соответствие, сохраняющее расстояния) есть или трансляция $m' = m + \text{const.}$, или симметрия $m + m' = \text{const.}$

4. Говорят, что ориентированная прямая удовлетворяет аксиоме Архимеда, если для двух данных длин δ_1 и δ_2 , не равных 0, существует такое целое число n , что $n\delta_1 > \delta_2$.

С другой стороны, скажем, что две ориентированные прямые Δ и Δ' изоморфны, если существует взаимно однозначное соответствие между Δ и Δ' , которое сохраняет порядок и которое преобразует конгруэнтные интервалы Δ (соотв. Δ') в конгруэнтные интервалы Δ' (соотв. Δ).

Показать, что если ориентированная прямая удовлетворяет аксиоме Архимеда, то она будет изоморфна подмножеству действительной прямой (показать сначала, что на Δ существует несчетное подмножество, имеющее точки на каждом замкнутом интервале).

5. Говорят, что ориентированная прямая Δ удовлетворяет аксиоме непрерывности, если для возрастающей последовательности точек, ограниченной сверху ($a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b$), множество таких точек b' , что $a_n \leq b'$ для всякого n , обладает наименьшим элементом (который называют пределом последовательности).

Показать, что если ориентированная прямая Δ удовлетворяет аксиоме непрерывности: 1) она удовлетворяет также аксиоме Архимеда, 2) она изоморфна действительной прямой R или совокупности целых чисел положительных или отрицательных.

Прямая, неориентированная. Со всякой ориентированной прямой Δ ассоциируется прямая противоположно ориентированная, полученная сохранением той же конгруэнтности, но с заменой порядка ему противоположным. Неориентированной прямой называют пару, состоящую из двух таких ориентированных прямых.

Из предложения упражнения 3 выводим важный факт, что взаимно однозначное отображение прямой на нее самое, при котором сохраняются расстояния, будет или сохранять порядок или менять его на противоположный. Это есть постоянный изоморфизм структуры прямой.

III. Геометрия плоскости

Пусть Δ — раз и навсегда данная прямая, которая будет играть важную роль, потому что к ней мы будем относить длины и интервалы на прямых нашей плоскости. По отношению к Δ мы не делаем специальных предположений, например мы не предполагаем, что она удовлетворяет аксиоме Архимеда. Она будет служить «мерой», определяющей различные свойства плоскости. Плоскость, которую мы будем изучать, назовем ассоциированной с прямой Δ .

Было бы неправильно предполагать, что любую прямую можно ассоциировать с плоскостью. Например, прямая Q , полученная

из группы рациональных чисел, не ассоциирована с плоскостью. Мы не будем в этой элементарной работе исследовать условия, при которых прямая Δ может быть ассоциирована с плоскостью. Существование таких прямых не очевидно. Оно схематически рассмотрено, например, в изложении геометрии плоскости на странице 70 и следующих. Действительно, впоследствии мы увидим, что структура исходной прямой Δ не используется явным образом.

Плоскость π есть множество, измеряемое посредством Δ .

Это означает, что всякой упорядоченной паре точек (a, b) плоскости π относят длину $\delta(a, b)$, принадлежащую $L(\Delta)$, таким образом, что:

(P_1) $\delta(a, b) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = b$,

(P_2) $\delta(a, b) = \delta(b, a)$ (симметрия).

(P_3) $\delta(a, c) \leq \delta(a, b) + \delta(b, c)$ (неравенство треугольника).

Определение. Пусть E и E' — некоторые множества из π или из Δ . Взаимно однозначное соответствие $m' = \varphi(m)$ между E и E' называется изометрией, если $\delta(a', b') = \delta(a, b)$, каковы бы ни были a и b из E . Назовем прямой всякое подмножество из π , изометричное с Δ .

Отсюда следует, что любые две прямые из π изометричны между собой.

На основании сделанного выше замечания относительно определения неориентированной прямой изометрия Δ , определяемая на множестве D , индуцирует на D вполне определенную структуру прямой.

Следствие из P_3 . Назовем многоугольником всякую конечную упорядоченную последовательность точек плоскости π — (a_1, a_2, \dots, a_n) ; a_1 называется началом, а a_n — концом. Остальные точки называются **вершинами**. Если назовем звеном многоугольника любую пару (a_i, a_{i+1}) , а длиной многоугольника сумму длин его звеньев $\sum \delta(a_i, a_{i+1}) (1 \leq i \leq n)$, то будем иметь, что $\delta(a_1, a_n) \leq$ длины многоугольника. Если же будет иметь место равенство, то оно же будет иметь место и для любой части многоугольника $(a_{n_1}, \dots, a_{n_p})$ (где $n_i \leq n_{i+1}$).

Аксиомы сочетания.

P_4) Каковы бы ни были различные точки a и b на π , существует одна и только одна прямая, которой они принадлежат.

Аксиомы областей и вращения

P_5) Для всякой прямой D в плоскости π существует разделение (а priori не обязательно ориентированное) множества $(\pi - D)$ на два непустых множества E_1 и E_2 , обладающих свойствами:

а) всякий замкнутый интервал прямой, содержащий точку из E_1 и точку из E_2 , пересекает D .

в) Существует изометрия $m_2 = \varphi(m_1)$ между $(E_1 \cup D)$ и $(E_2 \cup D)$, которая оставляет неподвижной каждую точку D (т. е. $\varphi(m) = m$ для всякой $m \in D$).

Эта изометрия называется складыванием плоскости по прямой D (á priori — не единственное).

Позднее мы используем аксиому параллельности, которую мы можем принять в одной из указанных ниже форм, эквивалентность которых мы можем доказать, приняв вместе с предшествующими аксиомами аксиому Архимеда или аксиому непрерывности.

Аксиома параллельности¹.

P_6) Для всякой точки a и всякой прямой D существует не более одной прямой, проходящей через a и параллельной D ,

или: существует прямая D и вне ее точка, для которой это условие выполняется,

или: две прямые, параллельные одной и той же третьей, параллельны и между собой,

или: соотношение параллельности является соотношением эквивалентности для множества всех прямых,

или: существует по крайней мере один прямоугольник (совокупность четырех различных точек (a, b, c, d) , для которых

$$ab \perp bc, \quad bc \perp cd, \quad cd \perp da, \quad da \perp ab,$$

или: всякую совокупность четырех точек можно поместить внутри треугольника. Но если не будет оговорено противное, эту последнюю аксиому мы используем возможно позднее.

П р и м е ч а н и е. В этом изложении, которое мы хотим сделать возможно более элементарным, мы не будем стараться ослаблять требования, заключающиеся в аксиомах. Эти аксиомы могли бы быть менее сильными, но это усложнило бы изложение.

Первые основные леммы.

Самой трудной частью работы является, без сомнения, начало, несмотря на простоту доказательств, ввиду того что мы очень далеко отошли от аксиом. Это объясняется тем, что в это время мы обладаем очень ограниченным запасом предложений, которые могли бы опереться на интуицию. Поэтому начало должно быть изложено с большой осторожностью.

1) Определение. Если a и b различные точки π , то мы будем символами $]a, b[$ и $[a, b]$ соответственно обозначать открытый или замкнутый интервал с концами a и b на прямой, содержащей a и b .

¹ Мы будем здесь называть параллельными как две непересекающиеся прямые, так и две совпадающие.

2) Точки подмножества E плоскости называются **коллинеарными**, если они лежат на одной и той же прямой. Когда три точки лежат на одной и той же прямой, одно из трех расстояний между ними равно сумме двух других. Обратное:

Основная лемма. Если три различные точки a , b и c удовлетворяют условию: $\delta(a, b) + \delta(b, c) = \delta(a, c)$, то эти точки коллинеарны и b лежит между a и c (рис. 2).

Доказательство. Пусть D — прямая, содержащая a и c . Обозначим через D' совокупность $(D - [ac])$, $[ab]$ и $[bc]$.

Докажем, что D' есть прямая; а так как D' содержит a , b , c , то лемма будет доказана. Для этого достаточно найти изометрию $m' = \varphi(m)$ между D и D' , которую мы определим так: для всякой $m \in D - [a, c]$ положим $m' = \varphi(m) = m$.

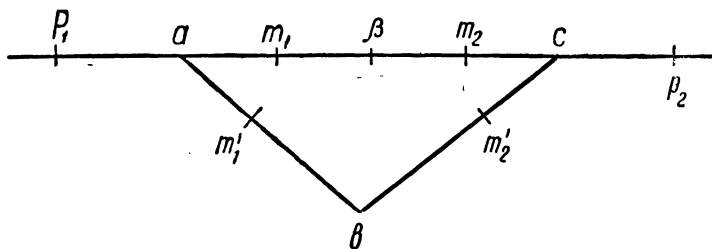


Рис. 2.

Пусть теперь β есть точка $[a, c]$, для которой $\delta(a, \beta) = \delta(a, b)$ (отсюда $\delta(\beta, c) = \delta(b, c)$).

Для $m \in [a, \beta]$, $\varphi(m)$ есть точка m' из $[a, b]$, для которой $\delta(a, m) = \delta(a, m')$.

Для $m' \in [c, \beta]$, $\varphi(m)$ есть такая точка $[c, b]$, для которой $\delta(c, m) = \delta(c, m')$.

Положим теперь, что m_1 и m_2 различные точки D , а m_1' и m_2' — точки, им соответственные.

На $(D - [a, c])$ можно найти такие точки p_1 и p_2 , что m_1 и m_2 окажутся между p_1 и p_2 . Существует многоугольник с концами p_1 и p_2 , вершины которого возьмем в совокупности $\{m_1, m_2, a, \beta, c\}$ и которые можно обозначить (a_1, a_2, \dots, a_n) при $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Применение φ к каждому интервалу $[a_i, a_{i+1}]$ дает изометрию.

Имеем $\delta(p_1, p_2)$ или $\delta(a_1, a_n) = \sum \delta(a_i, a_{i+1})$. С другой стороны, $\delta(a'_1, a'_n) \leq \sum \delta(a'_i, a'_{i+1})$. Но $a'_1 = p_1$ и $a'_n = p_2$, а $\delta(a'_i, a'_{i+1}) = \delta(a_i, a_{i+1})$.

Откуда $\delta(a'_1, a'_n) = \sum \delta(a'_i, a'_{i+1})$.

К многоугольнику $\{a'_1, a'_2, \dots, a'_n\}$ применим замечание, сделанное к P_3 , и получим:

$\delta(a'_i, a'_j)$ = сумме длин звеньев между a'_i и a'_j = сумме длин соответствующих звеньев между a_i и $a_j = \delta(a_i, a_j)$.

Это замечание, примененное к (m', m'_2) дает:

$$\delta(m'_1 m'_2) = \delta(m_1 m_2).$$

Следствие 1. Для того чтобы совокупность точек на плоскости была коллинеарной, необходимо и достаточно, чтобы коллинеарным было каждое подмножество из трех точек.

Следствие 2. Характеристика замкнутых интервалов: если $a \in \pi$ и $b \in \pi$, то множество точек m , удовлетворяющих условию $\delta(a, m) + \delta(m, b) = \delta(a, b)$ тождественно с $[ab]$.

Следствие 3. Для всякого многоугольника (a_1, a_2, \dots, a_n) имеем $\delta(a_1, a_n) <$ длины периметра многоугольника, за исключением того случая, когда совокупность $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ принадлежит прямой $a_1 a_n$ и точки расположены или в порядке $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n$ или — в обратном.

6. Введение аксиомы P_5 .

Пусть D — прямая плоскости и $m_2 = \varphi(m_1)$ соответственные точки, полученные складыванием согласно аксиоме P_5 . Отображение E_1 записывается так: $E_2 = \varphi(E_1)$.

Распространим это на взаимно однозначное отображение плоскости на саму себя $m' = \varphi(m)$ при помощи определений:

$$\begin{aligned}\psi(m) &= m, \text{ если } m \in D, \\ \psi(m) &= \varphi(m), \text{ если } m \in E_1, \\ \psi(m) &= \varphi^{-1}(m), \text{ если } m \in E_2.\end{aligned}$$

Лемма 2. Расширение $\varphi(m)$ складывания $\varphi(m)$ плоскости π есть изометрия плоскости на саму себя. Она называется симметрией по отношению к D .

Пусть a и $b \in \pi$.

Если a и b принадлежат $(E_1 \cup D)$, т. е. $\varphi \equiv \psi$ на E_1 , мы имеем $\delta(a', b') = \delta(a, b)$. Это же имеет место, если a и b принадлежат $(E_2 \cup D)$.

Если этого нет, положим, что $a' \in E_1$ и $b \in E_2$.

Пусть m точка пересечения $[ab]$ и D и $a' = \psi(a)$, $b' = \psi(b)$. Имеем: $\delta(ma) = \delta(ma')$; $\delta(mb) = \delta(mb')$.

Следовательно, $\delta(a' b') \leq \delta(a' m) + \delta(mb') = \delta(am) + \delta(mb) = \delta(ab)$.

Откуда $\delta(a' b') \leq \delta(ab)$.

Откуда $\delta(ab) \leq \delta(a' b')$, а значит, и равенство

$$\delta(ab) = \delta(a' b').$$

Отсюда получаем:

Следствие. Отображением всякой прямой (соотв. интервала $[ab]$) при помощи осевой симметрии есть тоже прямая (соотв. интервал $[a' b']$).

Пример. Для всякой точки $m \in (\pi - D)$ прямая, проходящая через m и $\psi(m)$, является инвариантной.

Для того чтобы установить, что разделение $(\pi - D)$ на E_1 и E_2 — единственно, необходимо, чтобы охарактеризовать эти множества, ввести понятие выпуклости.

Определение. Подмножество плоскости E называется выпуклым, если при условии $a \in E$ и $b \in E$, будем иметь также $[ab] \subset E$.

Непосредственные следствия. 1. Всякое пересечение выпуклых множеств — выпукло.

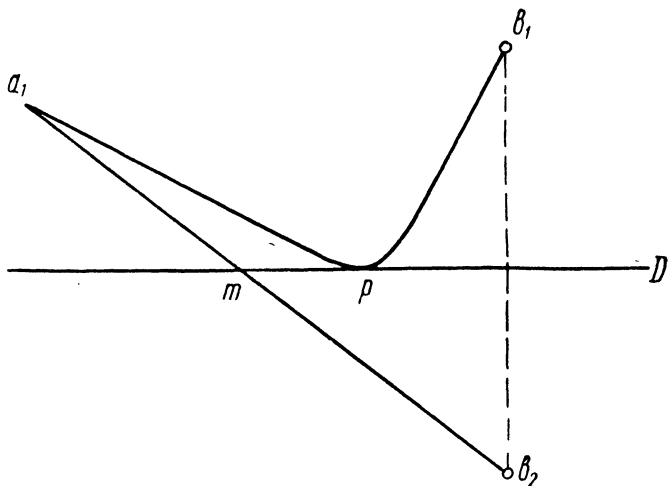


Рис. 3.

2. Так как множество, изометричное с замкнутым интервалом $[ab]$, есть тоже замкнутый интервал $[a'b']$, то всякое множество, изометричное с выпуклым множеством, есть тоже выпуклое.

Лемма 3. Всякое множество E_1 (или E_2), определяемое согласно аксиоме P_5 , — выпуклое.

Действительно, пусть $a_1 \in E_1$, $b_1 \in E_1$ и пусть b_1 преобразуется в b_2 : $b_2 = \psi(b_1)$.

Пусть m — общая точка D и $[a_1b_2]$ (рис. 3).

Если $[a, b]$ не содержится целиком в E_1 , то он пересекает D в точке p . Прежде всего не может быть, чтобы p совпало с m : $p = m$, так как тогда m принадлежала бы одновременно и $[a_1b_1]$ и $[a_1b_2]$, что при условии $\delta[m_1b_1] = \delta[m_1b_2]$ означало бы, что $b_1 = b_2$.

Итак, точка p не лежит на $[a_1b_2]$ и мы имеем:

$$\delta(a_1b_2) < \delta(a_1p) + \delta(pb_2) = \delta(a_1p) + \delta(pb_1) = \delta(a_1b_1).$$

С другой стороны, точка m не лежит на $[a_1b_1]$ и мы имеем:

$$\delta(a_1b_1) < \delta(a_1m) + \delta(mb_1) = \delta(a_1m) + \delta(mb_2) = \delta(a_1b_2).$$

Полученные неравенства противоречат друг другу, следовательно, $[a_1b_1]$ целиком принадлежит E_1 .

Замечание. Из этого доказательства непосредственно следует, что $\delta(a_1b_1) < \delta(a_1b_2)$. Это замечание мы используем позднее.

Теорема 1. Для каждой прямой D в плоскости разделение $(\pi - D)$ на E_1 и E_2 единственно, также единственным является свертывание плоскости, при котором E_1 налагается на E_2 .

Доказательство. Пусть a и $b \in (\pi - D)$.

Будем писать $a \sim b$, если $[ab]$ не пересекает D . Очевидно, $a \sim a$ и $(a \sim b) \rightarrow (b \sim a)$.

Далее, в силу леммы $3(a \sim b)$ и $(b \sim c) \rightarrow (a \sim c)$.

Это соотношение есть соотношение эквивалентности. Соответствующие классы тождественны E_1 и E_2 , каково бы ни было разделение $(\pi - D)$, удовлетворяющее аксиоме P_5 .

Итак, это разделение зависит только от D .

Каждое из этих множеств называется **открытой полуплоскостью**, **ограниченной прямой D** . Множества $(E_1 \cup D)$ и $(E_2 \cup D)$ называются **замкнутыми полуплоскостями**.

Каждая из этих полуплоскостей выпукла.

Теорема 2. Пусть ψ есть симметрия по отношению к прямой. Пусть $a \in E_1$ и p — общая точка D и $[aa']$ ($a' = \psi(a)$). Всякая точка m прямой D , отличная от p , лежит вне $[aa']$, поэтому $\delta(aa') < \delta(am) + \delta(ma') = 2\delta(am)$.

Но $\delta(aa') = 2\delta(ap)$, значит, $\delta(ap) < \delta(am)$.

Точка p обладает характерным свойством, не зависящим от выбора ψ , — быть наиболее близкой точкой D от точки a . Говорят, что p есть **проекция** точки a на D . Эта проекция есть середина интервала $[aa']$. Точка a' , симметричная с a по отношению к p и лежащая на прямой, содержащей a и p , определена независимо от ψ . Итак, ψ — единственна.

* * *

На этой стадии можно доказать большое число свойств, относящихся, с одной стороны, к выпуклости, а с другой — к разделению плоскости на области линиями многоугольника.

Несмотря на то что эти свойства очень интересны, они не существенны для развития начал геометрии. Мы ограничимся здесь лишь кратким очерком этих свойств. Поэтому читатель при желании может их пропустить и сразу перейти к чтению следующей главы.

Я хотел бы здесь воспользоваться случаем, чтобы выразить мое сожаление по поводу того, что в курсе элементарной геометрии совершенно обойдены изящные и важные свойства выпуклых множеств. Совершенно непонятно, почему обходят молчанием тот факт, что треугольник, прямоугольник, круг (позднее эллипс) являются выпуклыми фигурами. Сравнение длин периметров выпуклых многоугольников значительно упростило бы изучение длины окружности и ее дуг.

Было бы также интересно показать, хотя бы в лучших классах, после корректного определения соответствующих терминов, что всякий замкнутый многоугольник, не имеющий самопересечений, разделяет плоскость на две области, границами которых он является. Это можно было бы сделать по крайней мере для выпуклого многоугольника.

* * *

Определение. Треугольником называется совокупность трех точек $\{a, b, c\}$. Точки a, b и c называются вершинами треугольника. Треугольник называется **действительным**, если вершины его не коллинеарны, в противном случае он называется **вырожденным**. Стороны треугольника $\{a, b, c\}$ суть замкнутые интервалы $[ab]$, $[bc]$, $[ca]$.

В аксиоматике Гильберта имеется предложение, известное под названием аксиомы Паша, которую мы здесь докажем.

Теорема. Прямая D , не проходящая через вершины треугольника $\{a, b, c\}$ и пересекающая одну из его сторон, пересекает еще одну и только одну сторону.

Действительно, три точки (a, b, c) не могут все находиться в одной из полуплоскостей, определяемых прямой D , так как D пересекает одну из сторон $[ab]$, $[bc]$, $[ca]$, поэтому две из вершин, например a и b находятся в E_1 , а третья c находится в E_2 . Следовательно, $[ab] \cap D$ — пусто, а $[bc] \cap D$ и $[ca] \cap D$ — не пусто.

Это очень простое рассуждение можно, очевидно, обобщить. Введем для этого определение.

Определение замкнутого многоугольника.

Пусть (a_1, a_2, \dots, a_n) — многоугольник и $\vec{P}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ — совокупность многоугольников, которые можно получить из данного многоугольника циклической перестановкой вершин. Назовем эту совокупность замкнутым ориентированным многоугольником.

Два ориентированных многоугольника называются **противоположными**, если циклы их вершин проходят в противоположных направлениях.

Назовем замкнутым (неориентированным) многоугольником совокупность $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ двух противоположно ориентированных замкнутых многоугольников $\vec{P}(a_1, \dots, a_n)$ и $\vec{P}(a_n, \dots, a_1)$.

Стороной замкнутого многоугольника $P(a_1, \dots, a_n)$ называется всякий замкнутый интервал вида $[a_i, a_{i+1}]$, где $1 \leq i \leq n$ (принимая, что $a_{n+1} = a_1$).

Замкнутый многоугольник с тремя вершинами тождествен с треугольником.

Теорема. Прямая D , не проходящая через вершины замкнутого многоугольника $P(a_1, \dots, a_n)$, пересекает его стороны четное число раз.

Доказательство непосредственно следует из того, что если в последовательности $a_1, a_2, \dots, a_n, a_1$ прямая D пересекает сторону

$[a_i, a_{i+1}]$, то точки a_i и a_{i+1} окажутся по разные стороны D . Поэтому понадобится четное число раз перейти через прямую D , чтобы при обходе контура вернуться от точки a_1 к точке $a_{n+1} = a_1$.

Перпендикуляры и наклонные¹.

Говорят, что прямая D' перпендикулярна к D , и записывают $D \perp D'$, если $D' \neq D$ и D' симметрична самой себе относительно D . Но очевидно, что соотношение перпендикулярности взаимно.

Лемма. 1. Если $D' \perp D$, то эти прямые пересекаются.

2. Если прямые D' и D пересекаются в точке p , то для того чтобы имело место $D' \perp D$, необходимо и достаточно, чтобы для любой $m \in D$ и любой $m' \in D'$ при m и m' , отличных от p , имелось неравенство $|m'p| < |m'm|$.

Доказательство. 1. Прямая D' содержит по крайней мере две точки m_1 и m_2 , симметричные по отношению к D , поэтому $[m_1 m_2]$ пересекает D .

2. Положим $D' \perp D$. Тогда p есть проекция m' на D , значит, $|m'p| < m'm$.

Обратно, пусть m' точка прямой D' , не принадлежащая D . Если точка $m \neq D \cap D'$ такова, что $|m'p| < |m'm|$, то при $m \neq p$ точка p есть проекция (единственная) точки m' на D . Итак, прямая D' , содержащая m' , инвариантна в симметрии относительно D , значит, $D' \perp D$.

Теорема. Если $D' \perp D$, то также $D \perp D'$.

Доказательство: Положим $D \perp D'$ и пусть $m \in D$ при $m \neq p$. Для всякой точки m' прямой D' , отличной от p , имеем: $|mm'| = |mm''|$, обозначая через m'' точку, симметричную с m' относительно D . Поэтому точка m' не может быть проекцией m ; этой проекцией является только точка p . Отсюда следует $|mp| < |mm'|$ и на основании предыдущей леммы $D \perp D'$.

Итак, мы можем говорить о двух взаимно перпендикулярных прямых.

Следствие 1. Если $(D \perp D')$, то всякая изометрия в $(D \cup D')$ преобразует D и D' во взаимно перпендикулярные прямые.

Данное следствие есть также результат того, что ортогональность можно выразить в терминах расстояний, как показано в следующей лемме.

Следствие 2. Если точка a не принадлежит прямой D и m_1, m_2 — точки D , находящиеся на равных расстояниях от проекции p точки a на D , то $[am_1]$ и $[am_2]$ имеют одинаковую длину.

Это следствие позволяет при изучении наклонных am рассматривать только те, **основания** которых m лежат на одной и той же полупрямой с вершиной в p .

Теорема. Длина наклонной $[am]$ есть постоянно возрастающая функция расстояния p от m .

¹ Для упрощения обозначений заменим символ $\delta(a, b)$ символом $[a, b]$.

Доказательство. Положим, что $m_1 \in [pm_2]$ при $m_1 \neq m_2$. Для доказательства того, что $|am_1| < |am_2|$, покажем, что $|am_1| + |m_1a'| < |am_2| + |m_2a'|$, где a' симметрична с a по отношению к D . Это неравенство есть следствие общей теоремы, о которой мы уже упоминали, об охватывающих выпуклых многоугольниках. Приведем доказательство.

Точки m_2 и p лежат по разные стороны от прямой (am_1) , так как $[m_2p]$ пересекает эту прямую. Это же справедливо и для точек m_2 и a' . Значит, $[a'm_2]$ пересекает (am_1) в точке b' . Точки b' и a' лежат по одну сторону от D , поэтому $[ab']$ пересекает D и, следовательно, m_1 лежит между a и b' .

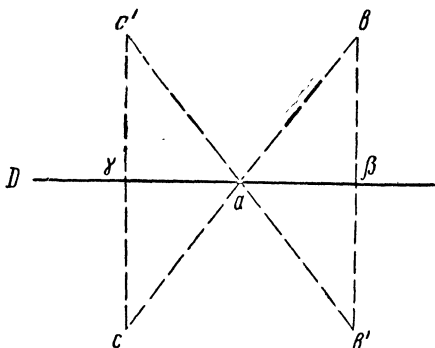


Рис. 4.

Имеем строгое неравенство: (1) $|ab'| < |am_2| + |m_2b'|$, так как m_2 вне (am') .

Далее: (2) $|a'm| \leq |a'b'| + |b'm_1|$, что можно записать: $|a'm| + |am_1| \leq |a'b'| + |ab'|$. И сравнивая с (1), найдем: $|a'm_1| + |am_1| < |a'b'| + |am_2| + |m_2b'| = |am_2| + |m_2a'|$.

Следствие. Если треугольник $\{a, b, c\}$ — равнобедренный при точке a , т. е. $|ab| = |ac|$, проекция p точки a

на прямую (bc) есть середина m интервала $[bc]$. Итак, $[ab]$ и $[ac]$ симметричны относительно прямой (am) .

Теорема. Через каждую точку a плоскости можно к данной прямой D провести один и только один перпендикуляр.

Доказательство. 1. Если a не лежит на D , то единственная перпендикулярная прямая проходит через a и a' , симметричную с a относительно D .

2. Пусть $a \in D$. Докажем сначала существование перпендикуляра построением. Пусть b есть точка плоскости, не принадлежащая D , а c симметрична с b по отношению к a и пусть b' и c' симметричны с b и c относительно D .

Если b и c' совпадут, то получим также $b' = c$. Тогда прямая (bb') , содержащая a , будет искомым перпендикуляром к D .

Положим теперь, что b и c' различны; точка a равноудалена от b и c' ; значит, перпендикуляр D' , проведенный через a к прямой (bc') ; есть ось симметрии $[ab]$ и $[ac']$, а также — их продолжений $[ab]$ и $[ac]$. Заметим, что D' отлична от D , так как в противном случае b' и c' совпали бы как b с c . Следовательно, точки β и γ , в которых D пересекает $[bb']$ и $[cc']$, суть соответственно середины этих интервалов. Так как пары (bb') и (cc') симметричны относительно D , то симметричны и их середины β и γ .

Точки β и γ различны (в противном случае они совпали бы с точкой a , являющейся серединой $[bb']$, $[bc]$ и $[cc']$, откуда получилось бы $b = c'$); поэтому прямая $(\beta\gamma)$, т. е. прямая D симметрична по отношению к D' , а так как $D' \neq D$, то $D \perp D'$.

Докажем теперь единственность перпендикуляра, проведенного к D . Пусть D' — перпендикуляр к D , проходящий через a . Возьмем на D две различные точки b и c на равных расстояниях от a ; они симметричны по отношению к D' . Для любой точки m , не принадлежащей D' , имеем $|mb| < |mc|$ или $|mb| > |mc|$ в силу замечания, сделанного к доказательству леммы 3. Поэтому равенство $|mb| = |mc|$ характерно для точек прямой D' . Но точки любого перпендикуляра D'' , проходящего через a , можно было бы охарактеризовать тем же равенством. Поэтому D'' совпадает с D' .

Определение. Две прямые называются параллельными, если они не имеют ни одной общей точки или если они совпадают. Это соотношение обозначается так: $D \parallel D'$ или $D' \parallel D$.

Непосредственными выводами из предыдущей теоремы будут:

Следствие 1. Две прямые, перпендикулярные к одной и той же третьей, параллельны между собой.

Следствие 2. Через всякую точку a , не принадлежащую прямой D , можно провести по крайней мере одну прямую, параллельную D . Действительно, если через a провести D' перпендикулярно к D и через эту же точку провести перпендикуляр к D' , то полученная прямая D'' параллельна D .

Симметрия относительно точки и симметрия относительно прямой.

В результате доказательства предыдущей теоремы мы видим, что если две перпендикулярные прямые D и D' проходят через точку a и если a есть середина $[bc]$, то точка, симметричная с b относительно D , симметрична с c относительно D' .

Другими словами:

Теорема. Симметрия по отношению к точке a тождественна с произведением симметрий относительно двух перпендикулярных осей, проходящих через a .

Иначе. Произведение симметрий относительно двух перпендикулярных прямых есть симметрия относительно точки их пересечения.

Следствие. Всякая симметрия по отношению к точке есть изометрия.

Медиатриса замкнутого интервала $[ab]$.

Положим $a \neq b$. Если существует хотя бы одна точка m , равноудаленная от a и b , то доказательство на странице 94 показывает, что геометрическое место таких точек тождественно с перпендикуляром, проведенным через m к (ab) .

Теорема. Геометрическое место точек, равноудаленных от несовпадающих точек a и b , или не существует, если $[ab]$ не имеет середины, или тождественно с медиатрисой $[ab]$, т. е. с перпендикуляром, проведенным к (ab) через середину $[ab]$, [129]

Для того чтобы можно было установить существование медиатрисы во всех случаях, мы должны показать, что прямая Δ , ассоциированная с плоскостью, должна быть такова, что:

Каковы бы ни были точки \dot{a} , b , принадлежащие Δ , существует на Δ такая точка m , что $|ma| = |mb|$.

Если на плоскости π , ассоциированной с прямой Δ , имеет место аксиома параллельности, то существование середины можно обосновать. Для плоскости π , удовлетворяющей аксиоме параллельности, существование середины отрезка может быть доказано как специальная теорема.

Основные следствия аксиомы параллельности.

Выше мы определили понятие параллельности. Аксиому параллельности мы примем в первой форме: «Через точку a к любой прямой D проходит не более одной параллельной».

Если D' и D'' — две параллельные к прямой D , то они или совпадают, или различны; пересекаться они не могут, так как тогда через точку пересечения проходили бы две параллельные к D . Итак, D' и D'' параллельны.

Другими словами, соотношение $D \parallel D'$, рефлексивное и симметричное по определению, становится и транзитивным, если принять аксиому параллельности.

Итак, это есть соотношение эквивалентности.

Обратно, если плоскость π такова, что соотношения параллельности на ней являются соотношениями эквивалентности, то две прямые, проходящие через одну и ту же точку и параллельные одной и той же третьей, не могут не совпадать. Это значит, что предыдущая аксиома эквивалентна двум следующим:

«Две прямые, параллельные одной и той же третьей, параллельны и между собой» или «Соотношение параллельности есть соотношение эквивалентности».

Направление прямой. Отношение параллельности определяет на множестве прямых классы эквивалентности, которые называются **направлениями**. С каждой прямой плоскости D связан класс эквивалентности, который называется **направлением прямой D** .

Непосредственное применение Говоря, что две прямые пересекаются в одной точке, мы этим выражаем, что D и D' имеют различные направления.

Существование и единственность параллельной. Соединяя аксиому параллельности со вторым следствием на странице 95, мы получим: «Через всякую точку плоскости можно к данной прямой провести одну и только одну параллельную»

Это же можно выразить и так:

«Через каждую точку плоскости проходит одна и только одна прямая данного направления».

Упражнение Пусть δ — направление прямой. Если a и b две точки плоскости, то будем обозначать через $(a \sim b)$ тот случай, когда

через эти точки проходит прямая направления δ . Показать, что это соотношение есть соотношение эквивалентности. Каковы здесь классы эквивалентности?

Параллельные и перпендикуляры.

Теорема. Если $D \parallel D'$, то любой перпендикуляр к D будет перпендикуляром и к D' .

Пусть $P \perp D'$. Прямая P пересекает D' , так как в противном случае D' была бы параллельна P , откуда следовало бы, что $P \parallel D$, что невозможно, так как перпендикулярные прямые имеют одну и только одну общую точку.

Пусть a точка пересечения P и D' . Перпендикуляр к прямой P , проходящей через точку a , параллелен D (следствие 1, стр. 95). Вследствие теоремы о единственности параллельной этот перпендикуляр совпадает с D' .

Следствие. Если $D \perp P$ и $D' \perp P'$, то при условии $D \parallel D'$ будем иметь, что и $P \parallel P'$.

Это следствие очевидным образом позволяет определить понятие перпендикулярности направлений, так как соотношение $D \perp P$ эквивалентно перпендикулярности направлений D и P .

Когда мы определим понятие угла, то его можно будет обобщить и определить угол между направлениями.

Теорема Фалеса.

Пусть D и D' — прямые, симметричные по отношению к прямой A , причем A параллельна D и не совпадает с ней. Прямая D' тоже параллельна A и не совпадает с D , так как в противном случае она была бы тождественна с симметричной прямой D и, не совпадая с A , была бы к ней перпендикулярна.

Пусть a точка прямой A и P — общий перпендикуляр к прямым D, A, D' , проходящий через a . Произведение симметрий (P) и (A) есть симметрия по отношению к точке a . Преобразованием (P) прямая D преобразуется в себя, преобразованием (A) — в прямую D' . Итак, D и D' симметричны друг с другом по отношению к a . Если через m, m', a обозначить точки пересечения прямых D, D', A с любой секущей прямой, проходящей через a , то получим, что a есть середина $[mm']$.

Обратно, пусть m, m', a коллинеарные точки, причем a есть середина $[mm']$. Пусть D и D' параллельные прямые, проходящие через m и m' . Если A есть прямая, параллельная D и D' и проходящая через точку a , то прямая, симметричная с D по отношению к A , параллельна D и пересекает прямую (mm') в точке, симметричной с m по отношению к a , т. е. эта прямая тождественна с D' .

Итак, D и D' симметричны по отношению к A . Отсюда следует теорема.

Теорема (Фалеса). Если три параллельные D, D', A при пересечении секущей определяют точки m, m', a , и a есть середина $[mm']$, то это будет иметь место для любой секущей.

Следствие 1. Для всякого $n \geq 2$ всякий отрезок можно разделить на n равных частей. (В частности, всякий отрезок имеет середину.)

Пусть $[ab]$ такой отрезок (при $a \neq b$). Проведем из a полупрямую (ax) , не параллельную $[ab]$, и отложим от точки a ряд равных отрезков $[aa_1] = [a_1a_2] = \dots = [a_{n-1}a_n]$. Прямые, параллельные $[a_n b]$, проведенные через точки a_i , пересекают (ab) в точках b_1, b_2, \dots, b_n ($b_n = b$), которыми осуществляется искомое деление. Это деление не зависит от построения, так как если длины δ и δ' таковы, что $\delta < \delta'$, то и $n\delta < n\delta'$.

На этой стадии можно ввести понятие о соизмеримых длинах и отношениях (рациональных) двух таких длин и показать, что отрезок $[ab]$ можно разделить единственным образом точкой m в отношении

$$\frac{|ma|}{|mb|} = r, \text{ где } r \text{ — рационально.}$$

Но изучение этого вопроса можно отнести к более позднему времени, когда будет интереснее ввести понятие отношения для произвольных длин.

Теорема Если D и D' — несовпадающие параллельные, то ось их симметрии — прямая A есть геометрическое место центров симметрии, преобразующей D в D' .

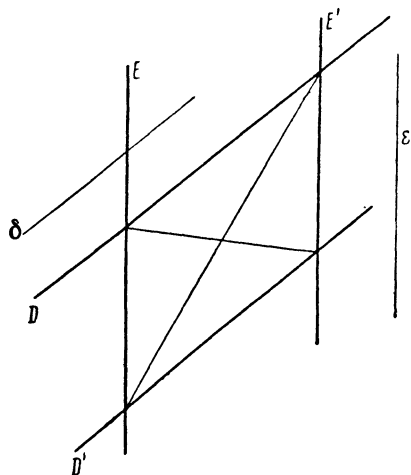


Рис. 5.

Действительно, пусть $m \in D$ и $m \in D'$ и a — середина $[mm']$, существование которой уже доказано. Прямая A , проходящая через a и параллельная D и D' , очевидно, удовлетворяет условию теоремы, в силу вышеизложенных предложений.

Следствие. Точка пересечения диагоналей параллелограмма есть центр его симметрии.

Пусть δ и ϵ — два различных направления, D и D' — различные прямые направления δ , E и E' — различные прямые направления ϵ . Обозначим через (DE) точку пересечения D и E и аналогично обозначим еще точки (DE') , $(D'E)$ и $(D'E')$ (рис. 5).

Если a есть середина между (DE) и $(D'E')$, то симметрия (a) преобразует D в D' и E в E' . Следовательно, она преобразует и $(D'E)$ в (DE') , т. е. a середина и для этих двух точек. [30]

Фигура, определяемая точками (DE) , (DE') , $(D'E)$ и $(D'E')$, называется параллелограммом. Мы получили, что он имеет центр симметрии, в котором пересекаются диагонали (DE) $(D'E')$ с (DE') $(D'E)$. Отсюда следует равенство противоположных сторон. Далее имеем:

Следствие. Длина отрезка, определяемая двумя параллельными D и D' на любой секущей, зависит только от ее направления.

Непосредственно отсюда следует также, что геометрическим местом точек, отстоящих от данной прямой A на данное расстояние l , являются две прямые, параллельные A и находящиеся от нее на данном расстоянии. Они симметричны относительно A .

IV. Учение об изометрии и ориентации.

Повторим, что **изометрию** мы определили как взаимно однозначное соответствие $m' = \varphi(m)$ между двумя подмножествами точек плоскости при условии сохранения расстояний.

Пример. Если $\{abc\}$ и $\{a'b'c'\}$ — два треугольника, то соответствие $a \rightarrow a'$, $b \rightarrow b'$ и $c \rightarrow c'$ будет изометрией, если

$$|ab| = |a'b'|, |bc| = |b'c'|, |ca| = |c'a'|.$$

Мы знаем, что всякая симметрия (мы имеем в виду осевую) есть изометрия. Это же справедливо и для конечного числа симметрий. Обратно мы можем доказать следующее:

Теорема. Всякая изометрия $m' = \varphi(m)$ между двумя множествами E и E' может быть расширена в изометрию $m' = \Phi(m)$ плоскости на самое себя; это будет либо тождество, либо симметрия, либо произведение двух симметрий, либо произведение трех симметрий.

Это расширение единственно, если E не расположено на одной прямой; есть два таких расширения, если E расположено на прямой и не приводится к одной точке. Существует бесконечное множество таких расширений, если E приводится к точке.

По ходу доказательства мы уточним эти выражения.

Заметим здесь, что эта теорема остается справедливой, если даже не опираться на аксиому параллельности, при условии замены этой аксиомы предложением «Всякий отрезок имеет середину», которое при наличии аксиомы параллельности является теоремой.

Доказательство. Пусть $m' = \varphi(m)$ — изометрия между E и E' . Если $\varphi(m) = m$ для всякой $m \in E$, то примем за Φ преобразование тождества I . Если этого нет, то существует $a \in E$, которая отлична от a' ($a \neq a'$); обозначим через S_a симметрию по отношению к медиатрисе aa' . Изометрия $(S_a\varphi)$ преобразует a в a . Если приложение $(S_a\varphi)$ к множеству E есть тождество, то положим $\Phi = S_a$. Если этого нет, то существует такая точка $b \in E$, что $b \neq b'' = (S_a\varphi)(b)$, тогда мы через S_b обозначим симметрию по отношению к медиатрисе bb'' . Изометрия $S_bS_a\varphi$ преобразует b в b благо-

даря выбору S_b и также — a в a , так как в силу равенства $ab'' = ab$ оси симметрии S проходит через a .

Если применение $(S_b S_a \varphi)$ к E окажется тождеством, то положим $\Phi = S_a S_b$. Если этого нет, то существует, такая точка $c \in E$, что $c''' = (S_b S_a \varphi)(c) \neq c$ и тогда через S_c обозначим симметрию по отношению к медиатрисе cc''' .

Я утверждаю, что применение $S_c S_b S_a \varphi$ к E есть тождество. В самом деле, так как $ac = ac'''$ и $bc = bc'''$, то S_c содержит точки a и b , предполагаемые различными. Далее, с одной стороны, $c = c'''$, точки a, b, c образуют действительный треугольник, с другой стороны, a, b, c инвариантны в $(S_c S_b S_a \varphi)$.

Положим, m^{IV} есть отображение точки $m \in E$ в этом преобразовании так, что

$$am = am^{IV}, \quad bm = bm^{IV}, \quad cm = cm^{IV}.$$

Если бы было, что $m \neq m^{IV}$, то медиатриса точек mm^{IV} прошла бы через a, b и c , что невозможно.

В этом случае положим $\Phi = S_a S_b S_c$.

Чтобы изучить все возможные расширения φ , рассмотрим два таких расширения Φ_1 и Φ_2 . Отображения Φ_1 и Φ_2 на E тождественны. Значит, отображение $(\Phi_1^{-1} \Phi_2)$ на E тождественно с I .

Такие же рассуждения, как вышеприведенные, показывают, что $\Phi_1^{-1} \Phi_2 \equiv I$, если E содержит действительный треугольник, $\Phi_1^{-1} \Phi_2 \equiv I$ или симметрии по отношению прямой, содержащей E , если E содержит хотя бы две точки, $\Phi_1^{-1} \Phi_2 \equiv$ всякой изометрии плоскости, оставляющей инвариантной точку a , если E приводится к одной этой точке.

Предыдущая теорема позволяет свести изучение изометрии между двумя множествами к изучению изометрии плоскости на самое себя.

Далее мы ограничимся только замечаниями о противоположных изометриях

Определение. Говорят, что изометрия **положительна**, если ее можно осуществить как произведение четного числа симметрий. Изометрия будет **отрицательной**, если ее можно осуществить как произведение **нечетного** числа осевых симметрий.

В силу предыдущей теоремы каждая изометрия принадлежит по крайней мере к одной из этих категорий. Мы хотим показать, что она принадлежит только к одной, т. е. что множество изометрий делится на два непересекающихся класса — класс положительных изометрий и класс отрицательных изометрий.

Докажем сначала, что произведение нечетного числа симметрий не может быть преобразованием тождества. Это очевидно для $n = 1$, так как одна симметрия не есть тождественное преобразование. Докажем это сначала для $n = 3$, но для этого нам необходимо:

Лемма 1. Произведение двух симметрий не может быть симметрией.

Пусть (D_1) , (D_2) и (Δ) три симметрии и положим, что $(D_1)(D_2) = (\Delta)$ [31]

Всякая точка $m \in \Delta$ инвариантна в (Δ) , а значит, и в $(D_1)(D_2)$. Тогда пусть $m' = (D_1)(m)$ и, значит, $m = (D_2)(m')$. Следовательно, D_1 и D_2 суть медиатрисы mm' .

Если для всякой $m \in \Delta$ имеем $m' = m$, то D_1 и D_2 совпадают с Δ , и мы имеем $(D_1)(D_2) = I$.

Если же $m \neq m'$, то медиатриса этих точек единственна, и, значит, $D_1 = D_2$ и опять $(D_1)(D_2) = I$. А так как получилось, что $I = (\Delta)$, то мы пришли к противоречию.

Случай $n > 3$ мы можем привести к $n = 3$, заменяя всякое произведение четырех симметрий произведением двух симметрий.

Теорема. Если T и T' две изометрии, каждая из которых есть произведение двух симметрий, то произведение $T'T$ есть тоже произведение двух симметрий. Мы воспользуемся леммой.

Лемма¹. Если $T = (D_2)(D_1)$, то для каждой прямой Δ_1 линейного пучка², определяемого D_1 и D_2 , существует другая прямая Δ_2 (и единственная) того же самого пучка, для которой будем иметь: $(D_2)(D_1) = (\Delta_2)(\Delta_1)$ (и аналогичные выражения, полученные перестановкой индексов 1 и 2).

Первый случай. D_1 и D_2 имеют общую точку ω . Пусть Δ_1 — некоторая прямая, проходящая через ω , и a есть точка Δ_1 , отличная от ω .

Δ_2 — прямая, проходящая через ω и середину $[a, T(a)]$, т. е. это ось симметрии, преобразующая друг в друга $[\omega a]$ и $[\omega T(a)]$.

Покажем, что $(\Delta_2)(\Delta_1) = (D_2D_1)$ или еще, что

$$\tau = (\Delta_1\Delta_2D_1D_2) = I.$$

На основании построения имеем: $\tau(\omega) = \omega$ и $\tau(a) = a$. Поэтому $\tau = I$ или $\tau = (\Delta_1)$.

Но последний случай исключается, так как тогда мы имели бы $(\Delta_1\Delta_2D_2D_1) = (\Delta_1)$ или $(\Delta_2D_2D_1) = I$, что невозможно, как было доказано выше.

Второй случай. D_1 и D_2 параллельны и различны. Пусть Δ_1 параллельна D_1 и D_2 и a есть точка Δ_1 . Точки a и $T(a)$ различны и расположены на одном и том же перпендикуляре к D_1 и D_2 .

Пусть Δ_2 — медиатриса $[a, T(a)]$, которая тоже параллельна D_1 и D_2 .

Сохраняя предыдущие обозначения, получим: $\tau(a) = a$.

С другой стороны, так как $T(\Delta_1)$ параллельна D_1 и D_2 , $\tau(\Delta_1)$ тоже параллельна Δ_1 ; так как $\tau(a) = a$, имеем $\tau(\Delta_1) = \Delta_1$; кроме того, каждый перпендикуляр к Δ_1 инвариантен относительно τ

¹ Заметим, что здесь в первый раз при изучении изометрии вводится аксиома параллельности.

² Пучок прямых есть множество прямых, проходящих через одну и ту же точку пересечения прямых D_1D_2 или — параллельных прямым D_1 и D_2 , если эти прямые параллельны и различны.

в каждой своей точке; из этих двух фактов следует, что для всякой точки b на Δ_1 имеем $\tau(b) = b$

Итак, или $\tau = I$, или $\tau = \Delta_1$.

Дальше рассуждаем, как и в предыдущем случае.

Доказательство теоремы

Положим, что $T = (D_2)(D_1)$ и $T' = (D'_2)(D'_1)$.

Следовательно, $T'T = (D'_2D'_1D_2D_1)$.

Всегда можно в случае необходимости произведение D'_1D_2 прямых $D_2D'_1$ заменить другим, надлежащим образом выбирая положение прямой D_2 , имея в виду лишь, что D_1 и D_2 имеют общую точку ω

Заменим теперь прямые D_1, D_2, D'_1, D'_2 прямыми $\Delta_1, \Delta_2, \Delta'_1, \Delta'_2$ так, чтобы:

$$a) (D'_2)(D'_1) = (\Delta'_2)(\Delta'_1), (D_2)(D_1) = (\Delta_2)(\Delta_1),$$

$$b) \Delta_1 = \Delta_2.$$

Для этого заметим, что пучки, определяемые прямыми D_1, D_2 и D'_1, D'_2 , имеют по крайней мере одну общую прямую, которую получим, проведя через ω или прямую, параллельную D'_1 и D'_2 , или прямую, проходящую через точку пересечения прямых D'_1 и D'_2 . Именно эту прямую примем за $\Delta'_1 = \Delta_2$.

Тогда получим $T'T = (\Delta'_2\Delta'_1\Delta_2\Delta_1) = (\Delta'_2\Delta_1)$, так как $\Delta'_1 = \Delta_2$

Следствие. Всякая положительная изометрия равна произведению двух симметрий. Эти положительные изометрии образуют группу. Пусть T такая изометрия. Если T имеет инвариантную точку, то для всякого разложения $T = D_2D_1$ прямые D_1D_2 проходят через эту точку. Если этого нет, то для всякого разложения $T = D_2D_1$ прямые D_1D_2 остаются параллельными одному и тому же направлению, определяемому T , причем расстояние между параллельными постоянно.

Эти результаты можно уточнить, если ввести понятия ориентированного угла и вектора.

Ориентация подмножеств плоскости. [32]

Определение. Изометрия T множества A на A' называется положительной (соотв. отрицательной), если она является результатом применения к A положительной (соотв. отрицательной) изометрии плоскости на самое себя.

На основании теоремы (стр. 99) каждая изометрия вполне определена, если в A имеются три неколлинеарные точки, а если A коллинеарно, то этот знак определить нельзя.

Отсюда следует, что будет интересно рассмотреть неколлинеарные тройки точек, т. е. треугольники.

Определение. Назовем действительным упорядоченным треугольником всякую упорядоченную тройку $\{a_1a_2a_3\}$ неколлинеарных точек.

Будем говорить, что два действительных упорядоченных треугольника (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3) равны (собственно; соотв. несобств.), если соответствие $a_i \rightarrow b_i$ есть изометрия (положительная; соотв. отрицательная).

Множество треугольников, равных данному треугольнику, разделяются на два класса: два треугольника одного и того же класса собственно равны, два треугольника различных классов несобственно равны.

Один из этих классов можно назвать положительным, тогда другой будет отрицательным. Для такого выбора, очевидно, достаточно назвать положительным произвольно выбранный треугольник $(a_1 a_2 a_3)$.

Сравнение двух действительных упорядоченных треугольников, равных или неравных.

Пусть $(a_1 a_2 a_3)$, $(b_1 b_2 b_3)$ два действительных упорядоченных треугольника, равных или неравных. Очевидно, что существует единственный треугольник $b'_1 b'_2 b'_3$, собственно равный $b_1 b_2 b_3$, и такой, что $a_1 = b'_1$, причем b'_2 и a_2 расположены на одной и той же полупрямой с началом ba_1 .

Если a_3 и b'_3 расположены по одну сторону от прямой $a_1 a_2$, мы положим $(a_1 a_2 a_3) \sim (b_1 b_2 b_3)$. Покажем, что это соотношение есть соотношение эквивалентности.

1. Оно рефлексивно — это очевидно

2. Оно симметрично. Действительно, пусть T есть собственная изометрия плоскости на самое себя, которая преобразует $(b_1 b_2 b_3)$ в $(b'_1 b'_2 b'_3)$. Изометрия T^{-1} — тоже собственная — преобразует фигуру, состоящую из $(a_1 a_2 a_3)$, $(b'_1 b'_2 b'_3)$, в фигуру $(a'_1 a'_2 a'_3)$, $(b_1 b_2 b_3)$ так, что b_3 и a'_3 оказываются по одну сторону от прямой $b_1 b_2$ и что a'_2 и b_2 лежат на одной и той же полупрямой с вершиной b_1 .

3. Оно транзитивно. Это есть результат того, что если мы имеем три действительных треугольника $(a_1 a_2 a_3)$ $(b_1 b_2 b_3)$ $(c_1 c_2 c_3)$, расположенных так, что $a_1 = b_1 = c_1$ с точками $a_2 b_2 c_2$, лежащими на одной и той же полупрямой с началом в a_1 , то если $a_3 b_3$ находятся по одну сторону от общей прямой ab , и это же имеет место для $b_3 c_3$, то это же можно утверждать и относительно c_3 и a_3 .

С одной стороны, это отношение эквивалентности сравнимо с собственным равенством, т. е. если $(a_1 a_2 a_3)$ и $(b_1 b_2 b_3)$ собственно равны, то это значит, что также $(a_1 a_2 a_3) \sim (b_1 b_2 b_3)$; действительно, в предыдущей конструкции упорядоченные треугольники $a_1 a_2 a_3$ и $b'_1 b'_2 b'_3$ тождественны.

Наконец, в этом отношении эквивалентности не может быть более двух классов, так как из определения следует, что либо $(a_1 a_2 a_3) \sim (b_1 b_2 b_3)$, либо $(a_1 a_2 a_3^*) \sim (b_1 b_2 b_3)$, где a_3^* симметрична a_3 по отношению к прямой $a_1 a_2$.

Вместе с тем эти два класса действительно существуют. Точнее, для всякого действительного упорядоченного треугольника $(a_1 a_2 a_3)$

не существует эквивалентности $(a_1 a_2 a_3) \sim (a_1 a_2 a_3^*)$, где a_3^* симметрична с a_3 относительно прямой $(a_1 a_2)$. Это есть непосредственное следствие определения соотношения \sim .

Определение. Если $(a_1 a_2 a_3) \sim (b_1 b_2 b_3)$, то говорят, что эти действительные упорядоченные треугольники имеют одинаковое направление, в противном случае они имеют противоположное направление.

Отсюда следует:

Собственно равные треугольники имеют одинаковые направления, несобственно равные треугольники имеют противоположные направления.

Теорема Для всякого действительного упорядоченного треугольника $(a_1 a_2 a_3)$ упорядоченные треугольники $(a_1 a_2 a_3)$ и $(a_1 a_3 a_2)$ противоположно направлены; это же относится и к треугольникам $(a_1 a_2 a_3) \vee (a_2 a_1 a_3)$.

Доказательство 1 Пусть треугольник $(a_1' a_2' a_3')$ симметричен с $(a_1 a_2 a_3)$ по отношению к биссектрисе полупрямых $a_1 a_2$ и $a_1 a_3$.

Очевидно, что $(a_1 a_2 a_3) \sim (a_1 a_3' a_2')$. Ввиду того что $(a_1 a_3 a_2)$ и $(a_1 a_3' a_2')$ имеют противоположные направления, мы имеем также, что $(a_1 a_2 a_3) \sim (a_1 a_3 a_2)$.

2. Пусть a_3' симметрична с a_3 относительно медиатрисы $a_1 a_2$. Тогда получим $(a_1 a_2 a_3) \sim (a_2 a_1 a_3')$. Далее $(a_2 a_1 a_3') \sim (a_2 a_1 a_3)$, так как точки a_3 и a_3' находятся по одну сторону от прямой $a_1 a_2$. Итак, $(a_1 a_2 a_3) \sim (a_2 a_1 a_3)$.

Следствие Имеем: $(a_1 a_2 a_3) \sim (a_2 a_3 a_1) \sim (a_3 a_1 a_2)$ и $(a_2 a_1 a_3) \sim (a_1 a_3 a_2) \sim (a_3 a_2 a_1)$.

Ориентированные треугольники. Каждому действительному треугольнику соответствует шесть действительных упорядоченных треугольников. Если рассматривать как эквивалентные треугольники, которые отличаются только циклической перестановкой, то мы убедимся, что это соотношение эквивалентности определяет два класса. Каждый из них называется **действительным ориентированным треугольником**. Каждому неупорядоченному треугольнику $a_1 a_2 a_3$ соответствуют два ориентированных треугольника:

$$[(a_1 a_2 a_3), (a_2 a_3 a_1), (a_3 a_1 a_2)] \text{ и } [(a_1 a_3 a_2), (a_3 a_2 a_1), (a_2 a_1 a_3)].$$

Для определения ориентированного треугольника достаточно указать одного представителя его класса, например, $(a_1 a_2 a_3)$ — для первого и $(a_1 a_3 a_2)$ — для второго.

На основании предыдущей теоремы и ее следствия для всякого ориентированного треугольника три его представителя имеют одно и то же направление и другие три — направление, противоположное первому. Соотношение \sim может быть распространено на множество действительных ориентированных треугольников. Назовем **направлением** действительного ориентированного треугольника класс всех действительных ориентированных треугольников, имеющих одно и то же направление.

Если произвольно выбранному действительному ориентированному треугольнику приписать **положительное** направление, то, очевидно, знак $+$ или $-$ можно отнести к любому действительному ориентированному треугольнику.

Взаимно однозначное ориентируемое соответствие.

Пусть A и A' два плоских множества и $m' = \Phi(m)$ — взаимно однозначное отображение A на A' . Говорят, что это отображение положительно ориентировано (соотв. отрицательно), если каждая тройка неколлинеарных точек в A имеет отображением тоже неколлинеарную тройку точек в A' и обратно (другими словами, каждый действительный треугольник имеет отображением тоже действительный треугольник и обратно) и если, кроме того, каждому «действительному ориентированному треугольнику» в A соответствует ориентированный треугольник того же направления (соотв. противоположного).

Примеры таких отображений.

1. Если A и A' — два ориентированных строго выпуклых многоугольника с n вершинами, то всякое взаимно однозначное соответствие, сохраняющее циклический порядок вершин этих многоугольников, есть ориентируемое отображение.

2. В плоскости R^2 всякое подобие или вообще всякое невырождающееся линейное преобразование.

3. В плоскости R^2 всякое соответствие между строго выпуклыми дугами кривых A и A' , сохраняющее длину частей этих дуг.

Углы и ориентированные углы.

До сих пор мы не говорили про углы. Теперь мы скажем о них несколько слов, хотя можно было бы довольно далеко развить геометрию, не говоря о них.

Одни авторы определяют угол как совокупность двух полупрямых с общей начальной точкой, другие — как множество точек, расположенных между этими полупрямыми. Эти выражения могут быть надлежащим образом уточнены; например, угол можно определить, как пересечение двух полуплоскостей (открытых или замкнутых).

Но мы предпочитаем рассматривать угол не как множество точек, а как множество полупрямых, исходящих из одной и той же точки.

Точнее, для всякой полуплоскости π_1 , ограниченной прямой D , и для каждой точки $O \in D$, будем называть развернутым углом (открытым или замкнутым), определяемым посредством (π_1 и O), множество полупрямых, исходящих из O и расположенных в полуплоскости π_1 (открытой или замкнутой). Назовем эти полупрямые **лучами**.

Назовем углом (открытым или замкнутым) всякое множество полупрямых, являющееся пересечением двух развернутых углов

(это пересечение всегда пустое, если развернутые углы имеют различные вершины) Неразвернутый угол назовем выпуклым.

Назовем **точечной основой** угла множество точек, принадлежащих лучам угла. Разные выпуклые углы имеют и разные точечные основы; этим пользуются для определения выпуклого угла при помощи его точечной основы. Точно так же существует каноническое отображение выпуклых углов на пары неколлинеарных полупрямых, которые ассоциируются очевидным образом с каждым выпуклым углом и которые называются сторонами угла.

Изометрия. Изометрией между двумя углами называют всякую изометрию между двумя точечными основами углов, которая преобразует луч одного угла в луч другого.

Если углы выпуклые, то всякая изометрия между их основами есть также изометрия между углами.

Теперь уже можно дать определение собственного или несобственного равенства углов и определить знаки ориентированных углов.

На этом мы закончим изучение углов.

Движения и непрерывные семейства изометрий.

Изучение понятия ориентации, к которому мы переходим, основано на возможности разделения на два класса множества изометрий плоскости на самое себя. Чтобы это стало совершенно ясно, все это можно связать с наиболее интуитивными понятиями.

Определение собственно равных плоских фигур существенным образом связано с непрерывным скольжением плоскости по самой себе. Постараемся уточнить эту интуитивную идею, ограничиваясь плоскостью, измеряемой действительной прямой Δ (действительная плоскость).

Непрерывное семейство изометрий.

Назовем непрерывным семейством изометрий плоскости множество изометрий $I_{(t)}$, непрерывно зависящих от параметра t , где $0 \leq t \leq 1$, в том смысле, что для всякой точки m_0 в плоскости преобразование $m_t = I_t(m_0)$ точки m_0 при помощи $I_{(t)}$ изменяется непрерывно, как функция t .

В частности, если для $t = 0$ имеем $I_0 =$ тождеству, то говорят, что семейство $I_{(t)}$ есть **скольжение**.

Можно доказать следующую теорему:

Теорема 1 Изометрии одного и того же непрерывного семейства либо все положительны, либо все отрицательны.

2. Обратно, если даны две изометрии одного и того же знака, то они принадлежат к одному и тому же непрерывному семейству изометрий; в частности, всякая положительная изометрия принадлежит скольжению.

Вторая часть этой теоремы говорит в сущности о том, что всякая положительная изометрия есть или параллельный перенос, или вращение около точки.

Первая часть приводит, например, к двум следующим предложениям:

1. Если треугольник $a' b' c'$ получен из треугольника abc положительной изометрией то каждая из величин

$$|aa'| \cdot |bc|, |bb'| \cdot |ca|, |cc'| \cdot |ab|$$

меньше суммы двух других.

2. Если треугольник $a' b' c'$ получен из треугольника abc при помощи отрицательной изометрии, то сумма трех предыдущих величин по меньшей мере равна $4S$, где S — площадь треугольника abc .

Упражнение на ориентированные треугольники Показать, что для всякого действительного треугольника abc существует такое число r , что если точки a', b', c' удовлетворяют условиям. $|aa'|, |bb'|, |cc'| < r$, то треугольник $a' b' c'$ тоже действительный и одинаково направленный с треугольником abc .

Каково наибольшее из чисел r ?

Прибавление I.

Введение на прямой в плоскости структуры вообще упорядоченного тела, сходственной со структурой аддитивной группы.

Пусть π — плоскость, измеренная прямой Δ . Пусть u некоторая длина, отличная от 0, раз и навсегда выбранная. Если a и b некоторые длины при $b \neq 0$, то можно определить также длину $x = \frac{a}{b}$. Пусть OD, OD' взаимно перпендикулярные полупрямые; пусть A, B — точки OD' , U и M — две точки OD , определенные так, что $|OA| = a$, $|OB| = b$, $|OU| = u$ и $AM \parallel BU$. По определению, $x = |OM|$.

Непосредственно ясно, что x не зависит от выбора OD и OD' . Итак, $x = \frac{a}{b}$ зависит только от a и b . Отсюда можно также определить произведение $a \cdot b = \frac{a}{U/b}$.

Покажем теперь — это совсем не очевидно¹, — что операция (ab) определяет на множестве длин, не равных 0, закон коммутативной группы и что эта операция дистрибутивна по отношению к сложению (длин) и сходственна со структурой порядка на Δ .

Точнее: если 0 и 1 обозначают определенные различные элементы прямой Δ , можно ассоциировать с парой (Δ, π) структуру коммутативного тела, упорядоченного на Δ , в котором нулевой элемент есть 0 и нейтральный элемент 1, так что структура аддитивной группы и ее структура порядка будут сходственными со структурой прямой Δ .

Благодаря этому теореме Фалеса можно дать более общее выражение: «Пусть даны три параллельные прямые D, D', D'' , если

¹ См., например, вышеуказанную книгу Хальстеда.

M, M', M'' — точки пересечения их с любой секущей, то отношение длин $|MM'|, |MM''|$ не зависит от выбора секущей».

Дальше можно сформулировать случаи подобия треугольников, приложение которых к прямоугольному треугольнику дает теорему Пифагора: $a^2 = b^2 + c^2$, которая показывает, что в теле, ассоциированном с прямой Δ , уравнение $x^2 = a^2 + b^2$ всегда разрешимо.

Мы не ставим здесь вопроса о том, что когда существует такая структура тела на Δ , то будет ли она единственной; другими словами, о том, будут ли изометричны плоскости π и π' , изометричные одной и той же прямой.

Прибавление II.

Евклидова неархимедова плоскость.

Пусть π — евклидова плоскость, измеренная прямой Δ . Мы должны здесь подчеркнуть тот факт, что если на Δ выбрать два различных элемента, один из которых обозначим 0, а другой 1, то на Δ можно определить структуру коммутативного упорядоченного тела, на котором всегда разрешимо уравнение $x^2 = a^2 + b^2$ и в котором нулевым элементом будет 0, а единичным 1. Будем обозначать это через Δ .

Если D и D' две взаимно перпендикулярные плоскости π , то всякая точка m на π проектируется на D и D' в две точки, которые определяют координаты m .

Таким образом, получают взаимно однозначное соответствие между точками π и парами элементов (x, y) тела Δ так, что если (x, y) и (x', y') координаты точек m и m' на π и d есть мера mm' , то имеем: $d^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2$.

Обратно, пусть Δ есть коммутативное упорядоченное тело, в котором всегда разрешимо уравнение $x^2 = a^2 + b^2$.

Пусть π есть множество пар (x, y) элементов Δ :

Назовем прямой геометрическое место точек (x, y) , удовлетворяющих уравнению $ax + by + c = 0$, где a и b не равны нулю одновременно. Отсюда непосредственно следует, что через две различные точки проходит одна и только одна прямая.

Пусть $(x, y), (x', y')$ две точки M и M' плоскости π ; их расстояние $d = |MM'|$ есть положительный элемент Δ , удовлетворяющий условию: $d^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2$.

Совершенно так же, как в классической аналитической геометрии, можно доказать, что если m, m', m'' — три точки множества π , то их взаимные расстояния удовлетворяют неравенству треугольника, и если одно из этих расстояний равно сумме двух других, то эти три точки коллинеарны.

Исходя из этого, можно показать при помощи элементарных вычислений, что измеренное таким образом при помощи Δ множество π есть плоскость.

Мы имеем в данном случае близкое к изоморфизму взаимно однозначное соответствие между множеством евклидовых плоскостей и множеством коммутативных упорядоченных тел, в которых уравнение $x^2 = a^2 + b^2$ всегда разрешимо.

Дадим несколько примеров таких тел:

1. K_1 есть множество рядов, образуемых по формуле $a = \sum_0^{\infty} \alpha_i U^{p_i}$, где α_i действительны, а p_i возрастающие целые числа произвольного знака, сумма, произведение и частное определяются обычно при условии, что $a > 0$, если коэффициент первого члена $\alpha_1 > 0$. Если a и b два таких разложения, $a^2 + b^2$ имеют свой первый член в четной степени, откуда следует существование $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Можно было бы ограничить K_1 и рассмотреть подмножества K'_1 от K_1 , образуемое рядами, которые имеют радиус сходимости, отличный от нуля. Аналогичные примеры мы получим, изменяя следующим образом природу формальных рядов.

2. K_2 есть множество формальных рядов рассмотренного вида, но в которых $u = x^{\frac{1}{p}}$, где p есть какое угодно целое число > 0 . Это тело алгебраически замкнуто.

3. K_3 есть множество всех формальных рядов вида $a = \sum_0^{\infty} \alpha_i U^{p_i}$, где p_i и α_i действительны и $p_i \rightarrow +\infty$ вместе с i .

Структура прямой в неархимедовой плоскости.

Пусть K коммутативное упорядоченное тело. Его можно ассоциировать с мультипликативной группой L порядков величины его элементов. Если a и b — два неравных нулю элемента из K , говорят, что a и b имеют один и тот же порядок величины, если существует такое целое n , что $n |a| > |b|$ и $n |b| > |a|$. Очевидно, это является отношением эквивалентности. Каждый из классов этой эквивалентности будем называть порядком величины в K . Порядок величины элемента a мы будем обозначать через \tilde{a} . Если a и b имеют одинаковый порядок величины, то их отношение $\frac{a}{b}$ будет иметь порядок величины единицы. Теперь можно сравнивать $\frac{a}{b}$ с множеством дробей $\frac{p}{q}$. Соответствие, определенное таким образом, относит $\frac{a}{b}$ некоторое действительное число, которое называется приведенным частным от $\frac{a}{b}$.

Если A и B два порядка величины, a и b — два элемента из K , причем $A = \tilde{a}$ и $B = \tilde{b}$, порядок величины \tilde{ab} , очевидно, не зависит от a и b . Говорят, что это есть произведение AB . Можно убедиться,

что эта операция определяет закон коммутативной группы на L и что отображение $a \rightarrow \tilde{a}$ множества $(K - O)$ на L есть гомоморфизм относительно умножения в K .

Порядок на K индуцирует порядок L , сходственный со структурой L .

Необходимое и достаточное условие того, чтобы K было архимедовым, заключается в том, чтобы L привелась к единственному элементу.

В предыдущем примере K_3 группа L_3 изоморфна с мультипликативной группой положительных действительных чисел.

Ячейки неархимедовой плоскости.

Пусть π неархимедова плоскость, измеряемая при помощи Δ . Пусть ε данная длина. Условимся говорить, что точки m и m' из π будут соседними, если $\tilde{mm'} < \tilde{\varepsilon}$. Это есть соотношение эквивалентности R на π . Будем называть каждый из классов этой эквивалентности **ячейкой** меры ε .

Множество ячеек, т. е. пространство π/R , имеет структуру, еще довольно близкую к структуре плоскости. Например, для всякой прямой D на π множество D/R изоморфно с Δ/R и π/R есть множество, измеримое аддитивной группой Δ/R .

Но если даны две точки m и m' из π/R , то через них проходит бесконечное множество различных прямых D/R , но нужно заметить, что все отрезки $[mm']$ этих прямых тождественны; точнее, две такие прямые совпадают внутри сферы с центром m и с радиусом того же порядка величины, как mm' . Материальная плоскость может нам дать хорошую иллюстрацию этого положения. Если рассматривать как неразличимые две точки, расстояние между которыми имеет порядок, меньший микрона, то можно еще говорить о «точках» и «о прямых», толщина которых порядка микрона и расстояние между двумя точками оценивать с точностью до микрона. Если даны две точки m и m' , то проходящие через них прямые M и M' совпадут только в нашем маленьком мире, т. е. внутри сферы, радиус которой того же порядка величины, как mm' .

Резюмируя, можно сказать, что множество ячеек данного измерения ε образует плоскость с точностью до ε .

Сделаем теперь микроскопический обзор каждой из таких ячеек.

Пусть C — такая ячейка. Это есть открытое выпуклое подмножество π , обладающее следующим свойством: для всякого $m \in C$, C есть объединение открытых кругов с центром m и с радиусом $n\varepsilon$ (n — целое ≥ 0).

Можно также утверждать, что это есть плоскость, именно плоскость неархимедова, при условии изучения ее при помощи подходящим образом подобранной оптики.

Пусть $\tilde{\varepsilon}$ не равная нулю длина $\leq \varepsilon$. Будем говорить, что точки t и t' из C эквивалентны, если $\tilde{tt'} < \tilde{\varepsilon}$ (точное неравенство). Этим определяется соотношение эквивалентности R' . Пространство частных C при помощи этих соотношений дает вновь плоскость с точностью до $\tilde{\varepsilon}$, измеряемую группой частных посредством R' из аддитивной подгруппы K , образуемой элементами, величины $\leq \varepsilon$.

В частности, если взять $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$, то пространство частных C , которое теперь получится, будет архимедовой плоскостью.

В итоге, каждая неархимедова плоскость может быть рассматривается как архимедова с точки зрения ε — наблюдателя, который ограничивает свои наблюдения внутренностью сферы радиусом $< n\varepsilon$ и который не отличает друг от друга точек, расстояние между которыми имеет порядок величины $< \varepsilon$.

Таким образом, мы находим в неевклидовой геометрии те же самые предложения, что и в геометрии архимедовой, если только надлежащим образом выбрать определения.

Например, длина окружности радиуса ρ , определяемая по отношению к описанным и вписанным многоугольникам, равна $(2\pi\rho)$, а площадь круга равна $\pi\rho^2$.

Упражнение. Если π есть неархимедова плоскость, то можно легко определить сумму ориентированных углов по модулю $4d$. Эта операция, определенная на множестве углов, есть закон коммутативной группы. Является ли эта группа вообще локально изоморфной с аддитивной группой, ассоциированной с прямой Δ , измеряющей π ?

Прибавление III.

Пример неевклидовой плоскости.

Мы убедимся в том, что, оставаясь в области элементарной геометрии и применяя логарифмы, очень просто получить модель неевклидовой геометрии. Возьмем в качестве прямой Δ действительную прямую R .

Общий пример множества, измеримого посредством Δ и удовлетворяющего аксиоме сочегания и аксиоме области.

Пусть π есть открытое выпуклое подмножество плоскости R^2 , которое не тождественно ни с R^2 , ни с полосой, огран. ченной двумя параллельными. При этих условиях всякая прямая, пересекающая π , пересекает и его границу по крайней мере в одной точке.

Пусть a и b — две точки из π , а $\gamma_1 \gamma_2$ — точки пересечения ab с границей π ; одна из точек $\gamma_1 \gamma_2$ может оказаться бесконечно удаленной.

По определению, алгебраической мерой ab на ориентированной прямой $\gamma_1 \gamma_2$ является:

(1) $\overline{ab} = \text{Log} \frac{1}{(ab\gamma_1\gamma_2)}$, где $(ab\gamma_1\gamma_2)$ обозначает классическое ангар-

моническое отношение. Эта величина положительна, если точки расположены в порядке $\gamma_1 ab \gamma_2$. Легко убедиться также, что $\overline{aa} = 0$ и что $\overline{ab} = \overline{ac} + \overline{cb}$, если точки a, b, c коллинеарны и расположены в порядке a, c, b .

Расстояние $|ab|$ есть, по определению, абсолютное значение ab . Оно существенно положительно, если $a \neq b$. И так как $\overline{ab} + \overline{ba} = 0$, то имеем $|ab| = |ba|$. Покажем, что удовлетворяются и неравенства треугольника.

Пусть a, b, c — три точки из π обозначим через $\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2$ — точки пересечения границы π соответственно с прямыми bc, ca и ab .

Предположим, что нумерация выбрана таким образом, что векторы $\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{bc}, \overrightarrow{ca}$ имеют положительную алгебраическую меру на прямых $\alpha_1\alpha_2, \beta_1\beta_2, \gamma_1\gamma_2$.

Неравенство $|ab| \leq |ac| + |cb|$ эквивалентно неравенству

$$\frac{\overline{\gamma_1 a}}{\overline{\gamma_1 b}} \cdot \frac{\overline{\gamma_2 b}}{\overline{\gamma_2 a}} \geq \left(\frac{\overline{\alpha_1 b}}{\overline{\alpha_1 c}} \cdot \frac{\overline{\alpha_2 c}}{\overline{\alpha_2 b}} \right) \cdot \left(\frac{\overline{\beta_1 c}}{\overline{\beta_1 a}} \cdot \frac{\overline{\beta_2 a}}{\overline{\beta_2 c}} \right),$$

которое можно записать так:

$$\frac{\overline{\gamma_1 a}}{\overline{\gamma_1 b}} \cdot \frac{\overline{\alpha_2 b}}{\overline{\alpha_2 c}} \cdot \frac{\overline{\beta_2 c}}{\overline{\beta_2 a}} \geq \frac{\overline{\gamma_2 a}}{\overline{\gamma_2 b}} \cdot \frac{\overline{\alpha_1 b}}{\overline{\alpha_1 c}} \cdot \frac{\overline{\beta_1 c}}{\overline{\beta_1 a}}.$$

Достаточно показать, что первый член ≥ 1 , а второй ≤ 1 .

Пусть γ'_1 — точка пересечения прямой $\alpha_2\beta_2$ с ab . По теореме Менелая имеем:

$$\frac{\overline{\gamma'_1 a}}{\overline{\gamma'_1 b}} \cdot \frac{\overline{\alpha_2 b}}{\overline{\alpha_2 c}} \cdot \frac{\overline{\beta_2 c}}{\overline{\beta_2 a}} = 1.$$

На прямой ab мы имеем естественный порядок $\gamma_1 \gamma'_1 ab$ в силу выпуклости π , отсюда

$$\frac{\overline{\gamma_1 a}}{\overline{\gamma_1 b}} \geq \frac{\overline{\gamma'_1 a}}{\overline{\gamma_1 b}},$$

чем и доказывается искомое свойство.

Таким же путем докажем, что второй член ≤ 1 .

Из предыдущего следует, что равенство будет иметь место в том случае, когда $\alpha_2, \beta_2, \gamma_1$ коллинеарны, так же как и $\alpha_1, \gamma_2, \beta_1$, что равносильно утверждению о прямолинейности частей границы $\widehat{\alpha_2 \gamma_1 \beta_2}$ и $\widehat{\alpha_1 \gamma_2 \beta_1}$. Можно также сказать, что равенство $|ab| = |ac| + |cb|$ будет иметь место, когда два угла при вершине C , дополнительные к углу C треугольника abc , встречаются границу π в двух отрезках прямой (они случайно могут привести к точке).

В частности, если граница π не содержит ни одного отрезка прямой, неравенство $|ab| \leq |ac| + |cb|$ является строгим, за ис-

ключением того случая, когда a , b и c коллинеарны и лежат между a и b . Итак, мы имеем:

Теорема 1. Если граница открытой выпуклой области π не пустая и не содержит никакой прямойлинейной части, то на множестве π , измеренном посредством R при помощи формулы (I), подтверждаются аксиомы P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , P_{5a} .

Образования прямых множеств π на R^2 являются открытыми интервалами $[\gamma_1\gamma_2]$. Это есть результат того, что понятие выпуклости одно и то же и в π и в R^2 .

Очевидно, что аксиома области P_5 справедлива. Прямая D разделяет множество π непосредственно. Действительно, если γ_1 , γ_2 есть отображение D , пересечение π с каждой открытой полуплоскостью, ограниченной $\gamma_1\gamma_2$, выпукло. Эти выпуклые множества и суть искомые области E_1 , E_2 .

Рассмотрение аксиомы поворота.

Пусть π есть область, удовлетворяющая условиям теоремы 1, D — прямая π , отображение $\gamma_1\gamma_2$ в R^2 и E_1 , E_2 — области, определяемые D . Посмотрим, при каких условиях между EUD и E_2UD существует изометрия, которая оставляет инвариантными все точки D . Мы знаем, что эта изометрия может быть расширена в изометрию π на самое себя. Одно из таких преобразований в R^2 есть точечное преобразование открытого множества π на самое себя, которое преобразует отрезок прямой в отрезок прямой. Здесь легко можно использовать классическое доказательство, типичное для проективного преобразования, и показать, что такое преобразование есть след проективного преобразования на π . Точнее, это есть «гомология» с осью $\gamma_1\gamma_2$ и центром — точкой O , причем π инвариантно в этой гомологии. В частности, если γ_1 и γ_2 находятся на конечном расстоянии, то касательные, проходящие через концы этого отрезка, пересекаются в точке O .

Если этот поворот существует для всякой D на π , границей π служит эллипс или парабола¹. (Для осуществления этого поворота достаточно, чтобы существовали три такие прямые, «полюсы», которые были бы неколлинеарными точками, и мы придем к тем же заключениям.)

Мы принимаем эту второстепенную точку зрения при элементарном изложении и будем изучать тот случай, когда π есть действительно внутренняя часть эллипса или параболы (можно всегда ограничиться внутренней частью круга).

Если $\gamma_1\gamma_2$ есть хорда эллипса и если O есть полюс $\gamma_1\gamma_2$, то поворот π относительно прямой D при базисе $[\gamma_1\gamma_2]$ определяется так:

¹ Заметим, что, если бы π было ограничено ветвью гиперболы, этот поворот существовал бы только в том случае, когда отображение прямой D , прямая $\gamma_1\gamma_2$ имела бы одну из точек, например γ_2 , бесконечно удаленной

Пусть m есть точка π ; m' есть такая точка прямой om , что $(oJmm') = -1$, где J есть точка пересечения $\gamma_1\gamma_2$ и om .

Непосредственные свойства плоскости π .

1. Очевидно, что через точку m , взятую вне прямой D (при базисе $\gamma_1\gamma_2$), проходит бесконечное множество прямых, не пересекающих D . Эти прямые проходят внутри угла, ограниченного предельными параллельными $m\gamma_1$ и $m\gamma_2$.

2. Заметим, что две прямые, не пересекающиеся с одной и той же третьей, могут и не быть не пересекающимися между собой.

3. Заметим, что внутри π можно найти такие четырехугольники (совокупности четырех точек), которые ни в каком треугольнике не могут быть помещены внутри.

4. На плоскости π можно определить равенство углов, их сумму и т. д. Но нужно заметить, что двум углам, равным в геометрии на плоскости π , не соответствуют равные между собой их отображения в R^2 , и обратно.

Пример неевклидовой и неархимедовой геометрии.

Пусть K — упорядоченное тело рядов, построенных по типу $\alpha_1 x^{p_1} + \dots + \alpha_i x^{p_i} + \dots$, где α_i — действительные числа и p_i определяют строго возрастающую последовательность целых чисел произвольного знака. Пусть K^2 евклидова неархимедова плоскость, построенная на K вышеуказанным способом (прибавление II). Пусть π — внутренняя часть круга с центром O и радиусом 1. Можно, как в случае R^2 , сопоставить двум точкам ab на π ангармоническое отношение $(ab\gamma_1\gamma_2)$. Число, ему обратное, есть элемент K , больший 1, если порядок точек на прямой $\gamma_1\gamma_2$ будет $\gamma_1 ab \gamma_2$.

Тогда всякому положительному элементу из K $a = \alpha_1 x^{p_1} + \dots + \alpha_i x^{p_i} + \dots$ (где $\alpha_1 > 0$) отнесем выражение: $\log a = -p_1 \log \frac{1}{x} + \log \alpha_1 +$ формальное разложение

$$\log \left[1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} x^{p_2 - p_1} + \dots + \frac{\alpha_1}{\alpha_i} x^{p_i - p_1} + \dots \right].$$

Множество таких формальных разложений вида

$$A = p \log \frac{1}{x} + \beta_0 + \beta_1 x + \dots + \beta_2 x^2 + \dots$$

образует, очевидно, коммутативную упорядоченную аддитивную группу G . Обозначим через $G(K)$ образ K на G при помощи этого отображения. Можно показать, так же как в случае при $K = R$, что множество π , измеренное посредством формулы $|ab| = a \cdot \text{сolutному значению } \log \left(\frac{1}{(ab\gamma_1\gamma_2)} \right)$, есть плоскость, удовлетворяющая аксиомам P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 . Но по своей конструкции она не архимедова и не евклидова.

Отметим здесь, что в противоположность тому, что происходит с прямыми Δ , измеряющими евклидову плоскость, прямая, которая измеряет неевклидову плоскость, не обязательно сходственна со структурой тела. Например, пусть K — тело алгебраических действительных чисел. В евклидовой плоскости K^2 возьмем в качестве плоскости π внутреннюю часть круга и построим по предыдущему методу неевклидову геометрию. Итак, π измерима посредством аддитивной группы $\log a$, где a — некоторое положительное алгебраическое число. На этом множестве не существует тела, сходственного со структурой аддитивной группы.

Глава VI.

ПЕДАГОГИКА МАТЕМАТИКИ.

Калёб Гаттенъо.

В этой главе мы будем говорить о педагогике математики, как о науке. Мы будем иметь дело с теми аспектами педагогики, которые могут быть понятны всем и которые можно выразить вполне объективно.

Вместе с тем мы не должны забывать, что в педагогической деятельности одни люди действуют на других и что личность, как таковая, играет в педагогике большую роль. Хотя совершенно очевидно, что личный элемент известным образом отражается на деятельности учителя и заставляет признать, что преподавание есть своего рода искусство, мы все же можем позволить себе пренебречь этой стороной, и хотя наши заключения и потеряют при этом нечто существенное, но они в то же время выиграют во всем том, что приносит наше нейтральное и объективное сознание: уверенность в истине, которую она приобретет. [33]

Наука, о которой здесь идет речь, есть результат концентрированной умственной деятельности, вводящей в анализ факторы преподавания математики, а в синтез — то, что дает педагогическая деятельность.

Факторы эти трех категорий: 1) идеи, которые вводятся в математическое содержание и в самый акт обучения; 2) математические структуры и их собственный динамизм; 3) отношение этих структур к структурам реальным, в частности в области приложений. [34]

Первые заключают в себе требования, чтобы преподаватель математики был также и психологом, вторые, — что с точки зрения передачи знаний он должен понимать, чем отличается математика от умственной работы в других областях знания, что эта работа очень разнообразна и требует ясности мысли. Наконец, третьи требуют, чтобы преподавание математики рассматривалось с точки зрения социальных перспектив.

Программа обуславливается не только структурой мысли и структурой математики, но также и целью преподавания. Часто эта цель служит экономическим нуждам или идеологическим целям социальной группы. Только от преподавателей математики зависит

возможность углубленного изучения этих фактов, и они способны произвести синтез, который послужит к тому, чтобы их социальная функция стала ясной и их ответственная задача выполнена.

Читатель нашел уже в предыдущих главах данные, относящиеся к психологическим и математическим действиям. Здесь мы будем говорить о преподавании в собственном смысле и покажем, как программа может стать действенной, т. е. изложенной, как синтез разнообразных фактов.

Динамическая точка зрения.

Вместо того чтобы рассматривать изучение математики, как изучение серии определенных глав, например, вначале — свойства углов и многоугольников, потом свойства окружности, потом подобие и т. д., мы предлагаем вести преподавание с помощью структур мышления, существующих в умах учеников, изучающих близкие к ним математические структуры.

Основная точка зрения этого динамического метода состоит в том, что ученики сами создают структуры мышления соответственно тому, что получает их сознание в результате работы учителя. [35]

Например, учитель знает, что сложение целых чисел может совершаться путем счета, прибавляя столько целых единиц к первому числу, сколько их имеется в другом:

$$5 + 6 = 5 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1,$$

и что сложение целых чисел всегда возможно. Ученик в своей школьной практике это очень быстро усваивает. Но в то время как учитель не встречает затруднения, употребляя знак $+$ между двумя дробями $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$, ученик видит, что правила, которые употребляли

раньше, здесь непригодны: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ не равно $\frac{2}{5}$, но он не понимает, почему употребляют тот же знак $+$, который становится для него двусмысленным. Ученик уяснит себе это, поняв, что эту операцию не сможет осуществить даже сам учитель, если он будет обращаться с дробями, как с целыми числами, и что правильность сложения дробей зависит от того, что когда мы пишем $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, то мы подразумеваем 2 и 3 шестых (соответственно равных $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$), которые равняются 5 шестым.

Таким образом, имеются две умственные структуры, объединенные знаком $+$, помещенным между двумя дробями, но операция может быть осуществлена только тогда, когда мы прибегаем к целым числам, для которых знак $+$ уже употреблялся. Сложение дробей делается новой схемой, как только мы начинаем понимать, что результат будет тот же, если мы преобразуем дроби так, чтобы эту операцию привести к сложению целых чисел, или

если преобразовать операцию $\frac{a}{b} + \frac{a}{d}$ в другую $\frac{ad + bc}{bd}$, которая уже устанавливает правило.

Как только эта эквивалентность осознана, мы поднимаемся над уровнем сложения целых чисел, и сложение дробей находит свое место и применимость в новых структурах мышления, как это имело место для целых чисел. Нет нужды возвращаться к отправному пункту наших рассуждений, чтобы понять, что возможно и дальнейшее движение в этом же направлении.

Представим теперь себе, что нам необходимо расширить понятие сложения на сложение дробей в элементарной алгебре.

В алгебре мы рассматриваем операции и производим действия над ними, получая в результате те же операции, тогда как в арифметике мы проводим действия над завершенными операциями (*des opérations figées*), которые суть числа или количества*, и в результате вновь получаем числа или количества. [36] В алгебре 1 рассматривается не как число, а как оператор тождественного умножения¹. К тому же в алгебре операции определяются парами: прямая и обратная операции даются одновременно. Так, $\frac{c}{a}$ есть

алгебраическая дробь, определяющая b из соотношения $c = ab$, где ab называется операцией умножения.

Рассматривая, например, выражения $s = vt$, мы видим, что оно эквивалентно выражениям: $v = \frac{s}{t}$, или $t = \frac{s}{v}$, или $\frac{1}{v} = \frac{t}{s}$, или $\frac{1}{s} = \frac{1}{vt}$, или $\frac{1}{t} = \frac{v}{s}$, или $vt = s$, и сознание этой эквивалентности и есть алгебраическая точка зрения.

Это и есть алгебраический операторный динамизм, который имеется уже и в арифметике, но постоянное сознание того, что здесь мы все время имеем дело с количеством или числом, делает этот динамизм менее очевидным.

Возвращаясь к расширению понятия сложения, которое позволяет складывать дроби, мы видим, что схема $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$ имеет тот же смысл, что все операторные схемы в следующих тождествах:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \frac{ad + bc}{bd} = \frac{da + bc}{bd} = \frac{ad + cb}{bd} = \frac{da + cb}{bd} = \dots\dots = \\ &= \dots = \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \text{ или } \frac{a}{b} = \frac{ad + bc}{bd} - \frac{c}{d} \text{ или, } \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} - \frac{a}{b} \text{ и т. д.,} \end{aligned}$$

* Количеством автор называет именованное число.

¹ В арифметике умножение на 1 не имеет смысла, и выражение $n \times 1 = n$ есть целесообразное обращение действия $1 \times n = 1 + 1 + \dots + 1$ (n раз), опирающееся на определение n . Эти соображения, очевидные для математиков, должны быть хорошо продуманы педагогами.

которые выявляют весь динамизм, содержащийся в этом выражении.

Это новое расширение понятий уже относится не только к дробям, но и к комбинированным операциям. Их можно рассматривать, как действие нескольких дополнительных схем одних над другими. Например, как применение операций $XY \rightleftharpoons YX$ и $U + V \rightleftharpoons V + U$ к $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$, $\frac{ad + bc}{bd}$ — раздельно или одновременно. [37] В частности, заметим, что схема коммутативности сложения играет две разные роли, смотря по тому, как мы напомним:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \quad \text{или} \quad ad + bc = bc + ad.$$

Трудности, испытываемые учениками при осознании всего этого, должны показать читателю, что в этом процессе открываются различные структуры мышления.

По определению следует, что алгебраические равенства суть динамические равновесия, т. е. другими словами, что они заключают в себе все указанные операции и им обратные.

Таким образом, из $b \times a \rightleftharpoons c$ следует $b \rightleftharpoons \frac{c}{a}$ или $a \rightleftharpoons \frac{c}{b}$ и т. д., из $\frac{1}{a} \rightleftharpoons b$ следует $\frac{1}{b} \rightleftharpoons a$ или $1 \rightleftharpoons a \times b$, или $a \rightleftharpoons \frac{1}{b}$ и т. д.

В алгебре целые числа означают только счет и имеют место только, как коэффициенты и показатели, а не как результат операций. [38] Алгебраическое уравнение содержит определенную последовательность операций, а его решение осуществляется посредством их обращения. Таким образом, левая часть уравнения $ax + b = c$ выражает, что сначала нужно произвести умножение, а потом сложение, а решение этого уравнения $x = \frac{c - b}{a}$ осуществляется сначала обращением сложения с b на вычитание и далее обращением умножения на a делением на a . Здесь нас интересует не числовое значение x , a или c (которые нам неизвестны), но операции. [39]

Решение этих алгебраических схем можно проследить шаг за шагом. Например, и линейное уравнение с одним неизвестным¹, и уравнения всех степеней, которые можно привести к серии простых обратных операций, могут быть изучены в области чисел ≥ 0 . Например, уравнение $\left(\frac{ax + b}{c}\right)^n d + l = f$ представляет собой такой порядок операций, обращением которого можно найти x .

Следующие по сложности вопросы элементарной алгебры могут быть введены путем комбинирования прежних операций с новыми, например, вводя степени и группируя члены. Здесь также решение

¹ Традиционное слово «неизвестное» затемняет истину, но для краткости мы будем его употреблять.

заключается в том, чтобы найти путь, который позволяет пройти те же операции в обратном порядке.

Например, решение уравнения второй степени будет возможно только тогда, когда его приведем к виду $a(x+b)^2=c$, в котором оно разрешимо посредством обратных операций. Как только это дошло до сознания, то не будет уже необходимости решать общие уравнения иначе, чем при помощи формулы решения и рассмотрения знака дискриминанта.

Динамическую точку зрения можно коротко выразить, сказав, что вначале речь идет об овладении сознанием того, что есть инвариантного в данных ситуациях; потом сознание находит, что эти инварианты путем их динамизма образуют новые положения, представляющие собой возможности получения других инвариантов, имеющих их собственный динамизм, и т. д.

Различные плоскости, в которых эти инварианты расположены, образуют различные области математики, и учителя могут помочь своим ученикам успевать в своем обучении, если они убедились, что переход от одного уровня к другому совершается после того, как сознание овладело динамизмом, содержащимся в элементах первой плоскости.

Часто переход совершается посредством специализации положений. Например, сложение — более общее понятие, чем повторение (аддитивное), но включение в сознание идеи равенства слагаемых приводит к новой операции — умножению. Когда мы поймем умножение и его свойства, выражающие свойства повторного сложения, мы найдем здесь специализацию в повторном умножении или теорию степеней целых положительных чисел.

Комбинируя эти операции и им обратные, мы расширяем область математики и можем приступать к разрешению новых вопросов.

Обобщение не является, таким образом, единственным методом, который движет математику вперед. В своем прогрессе сознание может открыть в частном случае структуру, которая может привести к осуществлению нового направления.

Педагогика может систематически использовать вышеуказанные замечания.

Вот несколько замечаний по поводу программы алгебры, которые могут помочь во время перехода от школы к университету.

Если секции¹ суть главы, в которых вопрос рассматривается «горизонтально»², то надо, как только операции вводят новую структуру, переходить к новой главе. Например, прибавить, вычесть или умножить многочлены — значит произвести операции одной и той же главы, потому что результат будет тоже многочлен; де-

¹ С е к ц и и — разделы программы.

² Т. е., другими словами, принцип секционирования заключается в том, что операции могут вводить только по одной структуре за один раз.

ление же многочленов, приводящее к рациональным дробям, должно, по нашему принципу, войти в другую секцию.

Так как операции вводятся попарно по принципу обратимости, то уже не является необходимым отделять по разным главам умножение сумм и разложение на множителей многочленов.

Показатели степеней и логарифмы — два различных способа чтения одного и того же выражения и образуют одну и ту же главу. [40]

Соглашения, которые позволяют расширять усвоенные положения в области, где операции не будут теми же самыми, должны составлять предмет особого внимания учителей, потому что появляющиеся структуры будут действительно новыми¹.

Формирование алгебраических понятий состоит в усвоении:

1) идей обратимости операций; 2) операторного динамизма, являющегося результатом эквивалентности и циклических комбинаций, получаемых прибавлением новых пар обратных операций к прежнему циклу; 3) определения *a priori* качеств, которыми обладает множество операций.

На уроках алгебры нужно подчеркнуть, что именно об этом будет идти речь.

II. Примеры уроков элементарной алгебры.

1. Ученики 11 лет (первый год средней школы).

Первоначальные сведения: арифметика.

Некоторые ученики не любят умножать или делить. Нужно заинтересовать всех и заставить сделать шаг в направлении приобретения алгебраического динамизма. Надо перейти от операций над числами к операциям над операциями.

Уроки идут по следующей схеме.

Учитель просит ученика А. задумать число, например, меньшее 10, а ученику В. сказать число, тоже меньшее 10; ученик С. говорит, что должен сделать А. с этими двумя числами. Результат счета объявляется учеником А. Спрашивается, каким было его первое число. После выбора условий можно удостовериться, что все ученики могут найти ответ. Варьируем операции, привлекая все более и более учеников. Этот метод позволяет непосредственно следить за успехами учеников, и он интересует вообще всех. После нескольких примеров можно попросить класс объяснить, что было сделано, чтобы добиться решения. Мы всегда добивались сто-процентной усвояемости во время этих уроков. Все ученики в клас-

¹ Например, выражения $x^1 = x$ или $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ вызывают затруднения.

В первом случае нет операции, а во втором — замена деления введением знака «—» создает впечатление, которое возникает стихийно, что операции деления и вычитания эквивалентны.

се вскоре понимали, что надо обратить основной порядок операций и найти для каждой операции обратную ей. После двух уроков числа уже задумывал не ученик, а вся инициатива переходила к учителю.

Примеры, подобные $\frac{\frac{R-S}{T} + U \times H + M}{J} = G$, найти R , решались в несколько секунд и казались более легкими, чем аналогичные примеры из арифметики.

Здесь применялся простой порядок операций.

Некоторые ученики, например, не могут найти U . Чтобы преодолеть это, надо ввести новый динамизм в предыдущий, который мы приводили выше, как $X + Y \rightleftharpoons Y + X$ или $X \times Y \rightleftharpoons Y \times X$. Начиная вновь предлагать ученику A . умножить число ученика B . на свое число или свое число на число ученика B . (или прибавить их) мы записываем, что происходит. Мы учим разрешить задачу и в том и в другом случае, отдавая себе отчет, в чем состоит основная проблема. При достижении этого мы можем разрешить все вопросы, которые нами поставлены.

Надо заметить, что мы вводим скобки тогда, когда эксперимент нам покажет, что выражение $R + A \times B$ имеет двойной смысл и что мы хотим знать точно, как обозначить письменно различие между «прибавить A к R и умножить на B » или «прибавить к R результат умножения A на B », которое устно все понимают.

Разбор этого вопроса и подобных ему подчеркивает еще раз важное значение скобок.

Мы двигаемся вперед шаг за шагом. Мы даем собственные примеры, которые наши товарищи обсуждают. Мы вводим в них историю и даем примеры из истории, переведенные на язык уравнений. Эти упражнения приучают наших учеников к изобретательности, что очень ценно, преобразуя урок алгебры в конкурс начитанности и общего развития, все время поддерживая математическое сознание на высоте.

Наши проблемы много интереснее, чем те, что находятся в учебнике, в которых ученики с первого взгляда видят искусственность, отсутствие воображения и излишнюю легкость помещенных вопросов.

Очевидно, что уравнения типа $\frac{2}{5}(x - a) + b = c$ в таком курсе, как наш, можно поместить на первом году. Также уравнения типа $3x + a = 5x + b$ или $3(x + a) + b = 5(x + a) + d$ могут быть легко разрешимы методами, к которым ученики приходят вполне самостоятельно. Учениками находятся обычные правила после интересного путешествия, не показавшегося никому длинным.

Если бы нам даже не было известно плачевное положение с математикой у большинства учеников после 5 лет обучения в средней школе, то и тогда наши рассуждения заслуживали бы внима-

ния. Но активность в работе класса, всеобщие успехи каждого из учеников и время, которое обычно занимает повторение и опросы, нас еще более убеждают, что мы находимся на верном пути.

Мы не возражаем, например, против введения уравнений типа $x^2 = a$ или $ax^2 = b$, или $(x - a)^2 = b$ (в случаях положительных решений) в продолжение первого года обучения.

2. Ученики 12 лет (средняя школа, 2-й год).

Предшествующий алгебраический динамизм легко распространяется на случаи уравнений второй степени, полученных возведением в квадрат числа, суммы или разности чисел. Отыскание неизвестного приводит к понятию о квадратном корне. Его место в последовательности операций зависит от порядка получения начального уравнения. Чтобы это уравнение соответствовало требованиям алгебры, надо распространить действительные числа по другую сторону от нуля. Это гораздо легче воспринимается в нашем плане, потому что наши ученики никогда не испытывали затруднений, когда им надо было обратить такие операции, как $A - B = C$, в которых $A = C + B$, каковы бы ни были A , B , C .

Учитель, который знает, что ученики оперируют над алгебраическими операциями, вводит понятие о двух направлениях на прямой с помощью симметричного расположения в зеркале и спрашивает, догадается ли класс, что произойдет, если движение будет происходить в ту или другую сторону.

Схематизируя этот пример при помощи векторов на прямой, мы можем применить к ним две операции: сохранение направления и перемену направления.

Но качественный анализ предыдущего примера может быть усилен обращением к количественным понятиям, если будем измерять векторы и установим, что их числовые значения не влияют на полученную структуру.

Как только векторы обозначены $+a$ или $-b$, то a и b будут длиной векторов, а « $-$ » и « $+$ » взяты произвольно (например, по традиции), тогда можно будет комбинировать эти новые обратимые операции с уже изученными операциями. Это позволит классифицировать уже знакомые операции или как обобщение в том случае, когда вычитание становится тождественным со сложением, изменяя своей обычной форме, или как распространение на более обширную область чисел.

Эта аналитическая работа осуществляется на примерах, выбираемых самими учащимися.

Обращая соотношение $(-a) \times (-a) = a^2$, выявляют, что операция $\sqrt{}$ удваивает число решений, потому что можно исходить и от того и от другого вектора $\mp a$. [41] Это дает нам основу для получения классического решения уравнения второй степени $a(x - b)^2 = c$ в расширенной области. Возможности здесь ограничены, так как определение значения x не является алгеброй.

Это уравнение может быть получено, если исходить от разности $x - b$ или $b - x$, тогда решения будут:

$$x - b = \sqrt{\frac{c}{a}} \text{ или } b - x = \sqrt{\frac{c}{a}} \text{ и если } b$$

предполагается вторым числом, то первое может быть получено прибавлением или вычитанием $\sqrt{\frac{c}{a}}$ из b , откуда получаем формулу, резюмирующую это приобретение мысли

$$x = b \mp \sqrt{\frac{c}{a}}.$$

Мы продолжаем настаивать, что наши обозначения указывают на то, какие операции мы должны произвести, и что алгебра не занимается числовыми значениями. Если последние появляются, тогда указанные операции не будут уже алгебраическими, и мы получаем при вычислении по формулам результаты, не представляющие математического интереса (но которые могут иметь большой интерес в других областях жизни). Это уже будет относиться к практической арифметике. [42]

Наши ученики получают в конце второго года динамизм, дающий им возможность разрешать задачи, которые требуют общеупотребительных действий над положительными и отрицательными числами.

Правило умножения дает различные способы, которыми можно распределить умножение $(a + b + c)$ на $(h + f + g + c)$; например: $(a + b + c)(h + f + g + b)$ есть общая операция, а

$$a(h + f + g + l) + b(h + f + g + l) + c(h + f + g + l)$$

есть результат трех распределений умножения и каждое из них будет эквивалентно сумме распределений для каждого члена суммы. Два интересных урока, построенных на этом принципе, дадут каждому ученику этого класса возможность увидеть, что умножение в алгебре является распределительным, тогда как в арифметике оно является сокращенным. [43]

Одновременно с распределением мы изучаем и обратную операцию, которую называют разложением на множители (или отысканием делителей), и учимся узнавать, которые из написанных случайно выражений могут быть разложены на множители.

3. Ученики 13 лет (3-й год обучения).

Теперь в основу обучения могут быть положены более сложные схемы. В отношении дистрибутивности мы уже можем теперь перейти к алгебраическим тождествам. В направлении динамизма чистой оперативности — к решению линейных уравнений. В области приложений мы будем составлять задачи в зависимости от наших знаний.

Алгебраические тождества являются результатом дистрибутивности в очень специальных случаях:

$$(a + b)(c + d) \text{ дает } (a + b)^2, (a - b)(c - d) \text{ дает } (a - b)^2, \\ (a - b)(c + d) \text{ дает } (a - b)(a + b).$$

Значение их заключается в том, что они входят как обратимые структуры в другие вопросы.

Сюда относятся, в силу евклидовой метрики и теоремы Пифагора, квадрат на плоскости, куб в пространстве, n -я степень в евклидовом n -мерном пространстве.

Мы ставим теперь новый вопрос и, основываясь на арифметике, рассматриваем два множества

$$\{n\} = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, 12, 13, 14, 15, \dots, \\ \{n^2\} = 1, 4, 9, 16, 25, \dots, 144, 169, 196, \dots$$

и исследуем отношения между $a^2 + b^2$ и $(a + b)^2$.

Мы убеждаемся, что нужно всегда прибавить что-то к сумме квадратов, чтобы получить квадрат суммы.

Анализ чисел, прибавляемых в различных случаях, приводит нас довольно быстро к открытию того, что есть $2 \times a \times b$ — результат, который выявляется общим методом, исходя из примеров и выражаемый для каких угодно чисел a и b через $2ab$.

Таким путем было установлено, что $a^2 + b^2 < (a + b)^2$ и что неравенство преобразуется в равенство тогда только, когда прибавим $2ab$ к левой части.

Сразу после этого ставится вопрос об $a^2 + b^2$ и $(a - b)^2$.

Примеры показывают, что $(a - b)^2 < a^2 + b^2$, и определяют в каждом примере, что нужно прибавить к первому числу, чтобы получить второе. Находят $2ab$ и получают $(a - b)^2 + 2ab = a^2 + b^2$.

Замечая, что $a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$, а также, что

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = (b + a)^2 = 2ab + b^2 + a^2 = a(a + b) + b(a + b),$$

мы обращаем внимание учащихся на то, что динамизм этих соотношений и является здесь алгеброй.

Эти тождества служат алгебраическому счислению, которое является специализацией операторной динамики.

Можно вычислить $(a + b + c)^2$, замещая $a + b$ через A или $b + c$ через C и оперируя два раза по формуле. Можно получить тождества более трудные, которые даются в учебниках, и удостовериться, что схема $()^2 + 2 () [] + []^2 \rightleftharpoons \{ () + [] \}^2$ распространяется на всякую сумму, которую можно схематически записать в виде $() + []$.

Совершенно очевидно, что для преподавателя представляет большой интерес воспитание алгебраического восприятия, которое

может быть достигнуто увеличением числа положений, содержащих в той или иной форме вопросы тождества.

Таким упражнением является выделение полного квадрата.

Решение уравнения второй степени, если оно написано в канонической форме $ax^2 + bx + c = 0$, есть очевидное приложение этого преобразования. Главное здесь заключается в том, чтобы перевести эту неразрешимую форму способом обращения операций в форму $(x - \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$, разрешимую уже извест-

ным методом. Таким образом, мы увеличиваем возможности наших учеников, позволяя им перейти препятствие, которое их определенно остановило бы раньше.

В течение этого же года может также изучаться алгебра систем совместных линейных уравнений или приводимых к ним путем замены переменных.

При изучении этого вопроса важно усвоить специальную динамику линейных уравнений, состоящую в преобразовании n совместных уравнений с n неизвестными вида $a_{v1}x_1 + a_{v2}x_2 + \dots + a_{vn}x_n = b_v (v = 1, 2, \dots, n)$ в n уравнений вида $x_v = f(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn}, b_1, b_2, \dots, b_n)$. Всякий иной подход к этому вопросу будет, как кажется, опасным. Действительно, мы не ставим вопрос об отыскании чисел, которые, будучи поставлены вместо неизвестных, преобразуют данные уравнения в тождества (что возможно, но не представляет интереса), но отделяем различные неизвестные таким образом, чтобы их значения стали известными.

Задача алгебры в данном случае состоит в разделении неизвестных, если это возможно. Их частные числовые значения не представляют интереса для алгебры. Они могли бы принимать различные значения в зависимости от изменений a и b без применения при этом алгебры. [44]

Поэтому мы не будем заниматься ни графическим решением уравнений с двумя неизвестными, ни разрешением вопроса о способе подстановки или исключения; нас интересует, с одной стороны, динамика системы и, с другой — рассмотрение преобразований, которые нам позволят в некоторый момент осуществить разделение переменных.

Исходя от $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$, мы легко увидим, что $x = 2$ и $y = 1$.

Точно так же видно, что для $\begin{cases} x + y = 30 \\ x - y = 10 \end{cases}$ или $\begin{cases} x + y = 300 \\ x - y = 100 \end{cases}$

имеем: $\begin{cases} x = 20 \\ y = 10 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = 200 \\ y = 100 \end{cases}$ соответственно.

Но мы не знаем, как поступить, чтобы дать решение в случае $\begin{cases} x + y = 3,2 \\ x - y = 1,2 \end{cases}$, который наши ученики находили вначале довольно

трудным. Анализ способов, применяемых в первых случаях, позволяет установить, что данная система эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} x = \frac{3,2 + 1,2}{2} = 2,2 \\ y = \frac{3,2 - 1,2}{2} = 1. \end{cases}$$

Отсюда мы, преобразуя правые части уравнений, приходим к новой системе.

$$\begin{cases} x + y = \text{некоторому данному многочлену} = p^\alpha + \dots, \\ x - y = \text{другому какому-нибудь многочлену} = q^\beta + \dots, \end{cases}$$

откуда
$$\begin{cases} y = \frac{p^\alpha + \dots - q^\beta - \dots}{2}, \\ x = \frac{p^\alpha + \dots + q^\beta + \dots}{2}. \end{cases}$$

Таким образом, мы не имеем больше затруднений со вторыми членами системы. Первые члены были одинаковы все время. Мы производим следующие изменения и рассматриваем, какое влияние они окажут на решение:

$$\begin{cases} y + x = p \\ x - y = q \end{cases} \quad \begin{cases} p = x + y \\ x - y = q \end{cases} \quad \begin{cases} p = x + y \\ q = x - y \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = q \\ x + y = p \end{cases} \quad \text{и т. д.}$$

Потом мы заменяем x и y через X и Y или ξ и η и рассматриваем результаты. Потом x и y заменяются через $2x$, $2y$, $3x$, $3y$, $\frac{x}{2}$, $\frac{y}{2}$, $\frac{x}{3}$, $\frac{y}{3}$, ax , ay , $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{a}$, и эти преобразования комбинируем с предыдущими, заменяя x и y через x^2 , y^2 , x^3 , y^3 .

Потом мы отказываемся от тождественности коэффициентов или показателей степеней, т. е. другими словами, мы заменяем x через ax^α и y через by^β . Все это не представляет больших сложностей, потому что все вводимые операции были уже изучены.

Более общая схема, допускающая правильное решение, такова:

$$\begin{cases} ax^\alpha + by^\beta = \text{многочлену } p, \\ ax^\alpha - by^\beta = \text{многочлену } q \end{cases}$$

и тотчас же получаем решение $x = \sqrt[\alpha]{\frac{p+q}{2a}}$, $y = \sqrt[\beta]{\frac{p-q}{2b}}$.

Но как только мы имеем $\begin{cases} ax + by = c, \\ ax + b'y = c', \end{cases} \quad b' \neq -b,$

метод больше не применим. Нам нужно лучше понять то, что мы делали до сих пор. Нам надо узнать, каким образом данная ком-

бинация линейных уравнений может быть преобразована в систему, которая нас интересует: $x = \dots, y = \dots$

Система, на которой мы остановились, содержит один и тот же коэффициент для одного из неизвестных и различные коэффициенты для другого. Какая бы ни была операция, которую мы будем производить по отношению к одному или другому уравнению, мы никогда не приведем эту систему к той, которую мы рассматривали раньше. Таким образом, нам нужно воздействовать на саму систему, как единственно данную, чтобы ее преобразовать и постараться привести ее в желаемый вид.

Заметим, что для нас нет привилегированного неизвестного, и потому мы должны трактовать и x и y совершенно одинаково, и оба уравнения, которые играют эквивалентную роль, должны и трактоваться одинаково.

Если мы умножим первое уравнение на -1 и сложим оба уравнения, первое преобразуется в $(b' - b)y = c' - c$, тогда как второе остается таким же. Таким образом наша система примет вид:

$$\begin{cases} (b' - b)y = c' - c, \\ ax + b'y = c', \end{cases} \text{ или еще } \begin{cases} y = \frac{c' - c}{b' - b} \\ ax + b'y = c' \end{cases} \text{ или еще}$$

$$\begin{cases} b'y = \frac{c' - c}{b' - b} b', \\ ax + b'y = c', \end{cases} \text{ или еще } \begin{cases} b'y = \frac{c' - c}{b' - b} b', \\ ax = c - \frac{c' - c}{b' - b} b', \end{cases} \text{ или}$$

$$\begin{cases} y = \frac{c' - c}{b' - b}, \\ x = \frac{1}{a} \left[\frac{cb' - bc'}{b' - b} \right], \end{cases}$$

которое будет иметь жедаемую форму.

Если теперь мы вновь перейдем к случаю, где коэффициенты при x тоже различны, мы придем к тем же операциям и после умножения первого на a' , а второго на a получим систему, где x и y разделены. То, что мы получили, рассматривая эти вопросы, не есть механическое решение системы двух уравнений с двумя неизвестными, что довольно легко сделать, но изучение алгебраического содержания, его алгебраическая трактовка, помня, что самым главным является операторная динамика. [45].

Если нужно разрешить систему трех уравнений с тремя неизвестными, то линейные комбинации уравнений нас также приведут к решению, которое дается отделением неизвестных.

Эта система, эквивалентная первой, получена тем же методом, который использовался в случае двух переменных. Это открывает путь к обобщению при изучении линейных уравнений, которые

обычно изучают в течение шестого года средней школы или в университете.

Этот третий год поднял алгебраическое сознание наших учеников на гораздо более высокий уровень. Они узнали алгебраическое исчисление, поняли ясно важность анализа, который позволил им установить сходство между различными объектами, как на пример

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} ax^a + by^b = \text{полиному}, \\ ax^a - by^b = \text{полиному}. \end{cases}$$

Они также поняли тонкость алгебраических механизмов и осознали, что надо подняться на следующую ступень, чтобы преодолеть трудности, которые, как в случае

$$\begin{cases} ax + by = c \\ ax - b'y = c' \end{cases} \quad b' \neq -b,$$

кажутся очень большими.

После трех лет изучения алгебры ученики 14 лет начинают понимать сущность алгебраических взаимоотношений и то, каким образом мысль использует их во всем содержании.

Они начинают постигать свободу, которую дает мысли абстракция, и начинают чувствовать себя математиками.

Вычисления же приобретают конкретность.

4. Ученики от 14 лет (4-й год).

Теперь можно приступить к изучению вопроса об отношениях между отношениями. В частности, изучить коммутативность композиций операций. Это можно сделать, изучая структуру прогрессий и производя упрощение алгебраических дробей, а также изучая теорию степеней с дробными показателями и делимость полиномов в простейших случаях.

Прогрессии дают пример структуры последовательностей или итераций и способ выделения элементов из множества. Инвариантом здесь является итерация (аддитивная или мультипликативная) и возникает необходимость установить *a priori* результат n итераций. [46]

Теория прогрессий является применением алгебраических методов к изучению результатов итераций.

Например, из $U_n = U_0 + nd$ получают выражения

$$U_0 = U_n - nd; \quad \frac{U_n - U_0}{d} = n, \quad \text{или} \quad d = \frac{U_n - U_0}{n},$$

или такие, которые выводятся из очевидных преобразований, как $U_p = U_q + (p - q)d$.

Специализируя природу элементов, получают арифметические результаты, такие, как, например, сумма целых последовательных чисел от 1 до n . Изучение суммы членов арифметической или геометрической прогрессий представляет случай открыть, каким образом применяют структуру этой операции. Действительно, в слу-

чае арифметической прогрессии каждый член можно получить либо прибавляя разность прогрессии к предыдущему члену, либо вычитая ее из последующего. Таким образом, каждый член имеет симметричное положение по отношению к двум соседним и также к равноотстоящим членам, что позволяет получить его значение несколькими способами, пользуясь членом, предполагаемым известным. Обратимость операции сложения благодаря своей очевидности позволяет ясно производить последовательные сложения или вычитания и заменять их друг другом.

Если эту идею применить к сумме, то получим:

$$s = a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (a + nd) = (n + 1)a + d + 2d + \dots + nd;$$

$$s = (l - nd) + \dots + (l - 2d) + (l - d) + l = (n + 1)l - d - 2d - 3d - \dots - nd \text{ или } 2s = (n + 1)a + (n + 1)l. \quad [47]$$

Переходя к геометрическим прогрессиям, находим, что тот же самый метод не годится для суммы

$$s = a + ar + ar^2 + \dots + ar^n \text{ или } s = \frac{l}{r^n} + \frac{l}{r^{n-1}} + \dots + \frac{l}{r} + l$$

потому, что известные операции не позволяют получить из этих двух соотношений одно, более простое. Действительно, мы видим, что вопрос сводится к тому, чтобы найти другую форму для суммы $1 + r + r^2 + \dots + r^n$. Эта проблема может быть разрешена, замечая, что

$$1 + r = \frac{(1 + r)(1 - r)}{1 - r} = \frac{1 - r^2}{1 - r},$$

$$1 + r + r^2 = \frac{(1 + r + r^2)(1 - r)}{1 - r} = \frac{1 - r^3}{1 - r}.$$

Записывая аналогичные тождества, мы наконец получим, что

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Это равенство проверяют, умножая оба члена на $1 - r$ или деля $1 - r^{n+1}$ на $1 - r$. Получая, как доказательство, эту последнюю операцию, пишем основное тождество:

$$(1 - r)(1 + r + r^2 + \dots + r^n) = 1 - r^{n+1}.$$

Его алгебраический смысл состоит в форме, получаемой обычными правилами.

Смотря по способностям класса к счету, вводятся задачи, которые разрешаются при помощи этих новых соотношений. Например, в качестве задач могут быть даны выводы формул для суммы квадратов членов арифметической прогрессии или суммы более высоких степеней, что можно осуществить уже известными алгебраическими методами.

Хотя для дальнейшего развития учеников наибольшую важность имеют числовые ряды, но все же первое место в этой главе о прогрессиях мы отдаем изучению итераций.

Другой пример мы имеем при изучении степеней: специализируя $a \times b$ или $a \times b \times c$ и т. д., находят $a \times a$, $a \times a \times a$ и т. д. Вводим a^2 , a^3 , ..., где степень числа не обозначает еще операции, но показывает, что дело идет об умножении, в котором содержится столько одинаковых множителей, сколько единиц в данном показателе. Отсюда следует, что a^1 не имеет никакого смысла и что мы должны быть особенно осторожны, когда вводим обозначение и рассматриваем его, как операцию.

Этот момент приходит, когда мы начинаем сознавать, что операции над показателями эквивалентны операциям, применимым к особым случаям равных множителей.

Таким образом,

$$a^m \times a^n = a^{m+n}; a^m : a^n = a^{m-n} \text{ или } 1/a^{n-m} \text{ (имея в виду), что } m \geq n) \cdot (a^m)^n = a^{mn} = a^{nm} = (a^n)^m, a^n b^n = (ab)^n, (a^p b^q)^n = a^{pn} b^{qn}$$

Найденные таким образом показатели вводятся в уже известные операции, и мы можем предложить исследовать, как можно расширить наше определение, чтобы согласовать его с уже известными соотношениями.

Например, что надо сделать для того, чтобы a^{m-n} и $1/a^{n-m}$, которые являются результатом одной и той же операции $a^m : a^n$, могли бы быть написаны одинаково?

Полагая $\frac{1}{a^p} = a^{-p}$, мы видим, что $\frac{a^m}{a^n} = a^m a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}$; $m - n > 0$, если $m > n$; $m - n < 0$, если $m < n$, что приводит к двум случаям. Если $p < 0$, $p = -q$, $q > 0$ и $\frac{1}{a^p} = \frac{1}{a^{-q}} = \frac{1}{\frac{1}{a^q}} = a^q = a^{-p}$.

Обозначение будет пригодно для p целого $\neq 0$.

Случай показателя степени, равного единице и нулю, будет также объектом определения; согласно условию a^1 будет тождественно a и $a^0 = 1$, если $a \neq 0$. Эти два обозначения соответствуют тому, что мы знаем о числе 0.

$$a^m : a^m = 1 = a^m \times a^{-m} = a^{m-m} = a^0 \text{ и } a^m : a^{m-1} = a = a^{m-m+1} = a^1.$$

Но эти два выражения не соответствуют ни одной операции, ранее известной. Действительно, нельзя получить a^1 , исходя из умножения равных множителей, ни тем более a^0 .

Эти определения придают единообразие теории показателей степеней; однажды усвоенная, она облегчает понимание определенных аспектов алгебры.

Теория показателей степеней путем обращения операции приводит к логарифмам, свойства которых можно прочесть в ранее установленных отношениях.

Это упражнение трудное и может служить мерой усвоения алгебраических процессов.

В частности, замена основания и тождества, которые получают, дают ученикам, понимающим двойной язык (степеней и логарифмов), удовольствие, испытываемое от простоты полученных законов и хорошего усвоения в процессе изучения.

Тогда появляется возможность раскрыть теорию логарифмов так, как она рождалась и создавалась ее основателями, и добиться понимания исторического значения идеи логарифмов.

Этот год можно использовать для того, чтобы дать первые представления об элементарных рядах так, как это делалось в XVII веке, с целью выявить связь между идеей соотношения в функциональной зависимости.

Алгебра не занимается ни бесконечностью, ни непрерывностью, поэтому учение о бесконечных рядах не составляет части алгебры, они находят себе место, когда вводится идея предела.

5. Ученики 15 лет (пятый год).

В этом возрасте уже достаточно подготовленные ученики могут приступить к изучению теорий более абстрактных и более общих, как например решение системы уравнений, некоторые свойства полиномов, знак полинома, учение о неравенствах, параметрические функции.

Теория исключений доказывает, что решение системы, которая не относится к линейным, ведет к уравнениям высших степеней и что ее изучение требует новых указаний. Биквадратные уравнения или уравнения высших степеней, приводимых к уравнениям второй степени, позволяют уже приступить к довольно абстрактному учению о числе действительных решений.

Учение об определении знака трехчлена второй степени с точки зрения места и значения переменной по отношению к корням, если таковые имеются, будет прекрасным средством для введения абстрактного понятия функции.

Надо заметить, что мы изучали до сих пор только операции и их динамизм. Теперь мы подходим к новым структурам. В частности, в неравенствах становится объяснимым понятие порядка, а в идее функции — понятие соответствия или отображения.

Чтобы остаться в области интуиции, мы можем применить графическое изображение. Тогда ученики и учителя должны будут дать себе отчет, что они употребляют орудия очень могущественные, мощность которых используется только в минимальной степени. Таким образом, решение системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными, которые мы находим алгебраически, может быть рассмотрено, как точка пересечения двух прямых. Здесь из структуры прямых используется единственно то, что две прямые пересекаются в одной точке, конечной или бесконечно удаленной. Этот метод изучать решение системы полезен при отыскании прибли-

женных числовых значений, для суждения же о природе системы он не дает ничего нового. [48]

Обобщение системы трех уравнений с тремя неизвестными и рассмотрение пересечения трех плоскостей уже настолько сложно, что интуиция здесь не поможет.

Если только графическое исследование сформулировано алгебраически, абстрактно, можно прибегнуть к геометрическому языку и использовать его для исследования положений.

Но в плоскости можно показать, что алгебраические соотношения могут быть отображены при помощи геометрических фигур. Так, можно сразу увидеть операторный результат, рассматривая график, где, например, прямая пересекает параболу. Для того чтобы система, состоящая из линейного уравнения и трехчлена второй степени, могла быть преобразована в систему с действительным разделением переменных, необходимо и достаточно, чтобы прямая и парабола, представляющие эти два уравнения, или пересекались, или касались, что выражает определенные уравнения между параметрами. [49]

Переход от геометрических эквивалентов к алгебраическим соотношениям должен служить формированию нового понимания алгебры и геометрии, как областей определенных отношений. Нам кажется полезным, если ученик еще в школе откроет, что математик больше занимается отношениями, чем фигурами и числами, хотя и те и другие по существу тоже отношения. Тот факт, что мы можем перейти от абстрактных представлений к геометрическим, и обратно, указывает, что ни те, ни другие не имеют ничего такого, что могло бы испугать математика.

Это открывает новые горизонты, где ученик может видеть отношения и структуры, которые являются достоянием современного математика.

Здесь нужно обратить внимание на то, что дурные привычки, укоренившиеся в школе, оказывают нежелательное влияние на формирование понятия функции и непрерывности. Поэтому особенно важны уроки, посвященные изучению графических методов. Сущность этих методов состоит в том, чтобы рассматривать пары (x, y) значений, взятых из одного и того же множества (например, (z) действительных чисел), и представлять все отображения на (z) множества $(z \times z)$. Нет необходимости знать, что это множество есть множество действительных чисел. Достаточно видеть, что если взять пару прямых и отнести точку плоскости к паре точек, взятых по одной на каждой прямой, то в зависимости от выбора соотношений, множество этих точек плоскости определяет геометрическое место, изображающее данное соотношение. Это множество соотношений ускользает от внимания наших учеников, даже когда они переходят в университет.

Можно начать изучение этой части программы, исходя от отрезка прямой и множества перпендикуляров к нему в каждой из точек этого отрезка.

Дальше можно делать произвольный выбор длин на этих перпендикулярах от их оснований. Это дало бы множество геометрических мест, весьма разнообразных, достаточное для того, чтобы ученики не думали, что этот способ получения функций ведет только к прямым линиям или коническим сечениям.

Нам кажется, что время, посвященное изучению соотношений такого рода, далеко не потеряно и что, несмотря на абстрактные результаты, целесообразнее приближаться к истине этим путем, — для того чтобы ученики такого возраста схватывали бы сущность в реальности и полезности метода, чем в медленном графическом получении прямых и парабол, которые отнимают столько уроков.

В математических построениях общее обязательно предшествует частному. [50] Надо иметь возможность сопоставления элементов двух множеств, прежде чем уточнить сущность пропорциональности или свойства показательной функции. Ученики доказывают нам это ежедневно своими советами, которые они дают в классе и которые мы отбрасываем потому, что мы хотим, чтобы их понятия формировались по нашей схеме. Ученики легче постигают более общую функцию, чем функцию частную до того, как они были точно определены, и тогда только очень специальные функции кажутся им функциями. [51]

Оставим в стороне эти общие замечания, которые могут быть справедливы для частных случаев и которые могут раздражать читателя с противоположными точками зрения. Наша цель в этом очерке заключается в изучении математической педагогики, чтобы побудить ее сделать шаг вперед, включая в нее уроки психологии математики и опыт математиков.

Наши ученики, которые мыслят очень отлично от нас, начинают к 14 годам испытывать большую радость в «биологических» упражнениях интеллектуальной мысли.

Открытие, которое осуществляется мыслью, есть одно из важнейших событий подрастающего поколения¹, и мы можем этим воспользоваться, чтобы привести наших учеников к пересмотру их отношений к математике, если она не любима, и достигнуть умственных вершин, если она любима.

Свобода, характеризующая настоящую мысль, к сожалению, плохо представлена в обычном преподавании математики, которая трактуется здесь как «дисциплина» ума. Все же она представлена в процессе построения математики и в сознании того, какое место занимает математика в мире отношений, в которых развивается мысль.

Алгебра есть по преимуществу область релятивной мысли, которая располагает большими возможностями, когда в преобразовании алгебраических выражений или отыскании квадратных

¹ См. наше «Введение в психологию эффектов и воспитание любви». *Introduction à la psychologie de l'affectivité et à l'éducation à l'amour* (Delachaux et Niestlé, 1952),

или кубических корней из многочленов и т. д. есть комплекс операций, приводящих к скорости и точности, как в счетной электронной машине.

Вопросы, которые мы указали в начале этого раздела, если они представлены как подготовка к введению условных отношений путем других отношений, являются вполне посильными для этого возраста.

Возникновение семейств прямых и парабол не только восхищает этот возраст, но также приносит ему математический опыт большой ценности.

Мы остановим на этом серию советов, которые хотели предложить читателю, надеясь, что он получит в них достаточно данных, чтобы увидеть, каким методом алгебраический опыт учеников может быть распространен на следующие классы. Он может включать в себя идеи, которые привели бы в 17 лет к знакомству с основными алгебраическими структурами и с методом, которым алгебра конструируется, исходя от фундаментальных отношений (операций) и законов, ими управляющих. Если этот эксперимент присоединяется к эксперименту геометрическому, о котором мы скажем позже, он может служить конкретной базой для большой свободы ума, которая достигается путем наиболее фундаментальных абстракций, т. е. наиболее укоренившихся в подсознании.

Математическое воспитание будет служить тогда общему воспитанию индивидуума.

III. Приобретение геометрического опыта.

Очень часто хотят видеть в изучении геометрии формирование умственной дисциплины, существенной базой которой являются силлогизмы. Отсюда переоценка значения доказательств и их схем. Но даже в традиционных сочинениях можно видеть, что догадливость учеников должна быть стимулирована и что решение задач приносит больший успех, чем простое доказательство.

Вот поэтому мы предлагаем математической педагогике изложение программы, основанное больше на геометрическом эксперименте, а не формальное изложение, которое было узаконено традиционным преподаванием геометрии с самого ее зарождения.

Но что представляет собой геометрический эксперимент?

Мы можем лучше его понять, противопоставляя его экспериментам алгебраическим и экспериментам по отношению к материальным вещам.

Осознать геометрические отношения — это значит увидеть в данном положении или инварианты по отношению к группе преобразований (как этого хотел Феликс Клейн), или организацию совокупностей точек во множествах, определяемых через отношения.

Ребенок уже с первых шагов своей жизни замечает, что организация всякого его чувственного опыта осуществляется по раз-

личным схемам. Он учится ходить, подниматься по лестнице и т. д., что заставляя его образовать совокупность перцепций и действий.

Но в то время, как цель этой деятельности заключается в освобождении от влияния окружающей среды, отношения, которые составляют сущность его сознания, могут осуществляться нормально только в годы отрочества, когда выявляется деятельность, в собственном значении этого слова, и когда разум воспринимает опыт, чтобы обсудить и понять его.

Основа познания пространства зарождается в отроческом возрасте, но изучение пространства возможно только в том случае, когда будет существовать достаточный опыт и когда ум посвятит себя исключительно расширению этого опыта.

Это одна из причин, вызывающих слишком запоздалое понимание смысла геометрии и слабого распространения интереса к ее изучению. Но при правильном руководстве подросток может здесь сделать довольно скоро большие шаги. Мы предприняли несколько опытов в этом отношении в различных классах, и все они дали положительный результат. Здесь опытный метод состоит в том, чтобы создавать необходимые положения и наблюдать прогресс учеников.

Первое замечание заключается в том, что преподавание геометрии должно совершаться путем организации особого эксперимента, имея специально в виду вызвать ростки интеллектуальной активности учеников. Например, использование циркуля для того, чтобы проводить окружности, еще не есть интеллектуальная активность, но знать, что можно сделать с помощью циркуля на плоскости, — это уже будет активностью.

Второе важное замечание относится к идее доказательства на различных уровнях эксперимента. Аксиоматическое доказательство не потому строго и убедительно, что оно аксиоматично, но потому, что за логической системой находится опыт здравого смысла эмпирики, который гарантирует то, что аксиомы утверждают факт, интеллектуально допустимый.

Отсюда следует, что в преподавании геометрии не надо делать ставку на какую-то общепринятую форму доказательства, но, смотря по уровню умственного развития, оно может принимать ту или иную форму.

Таким образом, провести окружность и поставить точку A на окружности, чтобы отличить две другие точки, B и C , на расстоянии от A , равном радиусу, есть предложенное положение, которое содержит только восприятие и действие. Но, продолжив это действие над B и C , как над центрами, определяющими другие точки, D и F , и прибавив шестую точку E , мы получим правильный шестиугольник. Заметить, каким образом организуются эти действия, — значит организовать геометрический эксперимент.

С нашими учениками 11 лет мы начинаем с того, что даем им циркуль и предоставляем им возможность рисовать окружности

по их вкусу, указав что они могут употреблять и цветные карандаши, чтобы делать из чертежей рисунки.

Полученный результат бывает замечателен с нескольких точек зрения. С одной стороны, это приносит эстетическое удовольствие, давая ученику чувство приятного удовлетворения в отношении их будущей работы с инструментом. С другой стороны, это действует на мысль и общее состояние развития ученика. Действительно, любопытно наблюдать, как те, которые никогда не делали этого упражнения раньше, ограничиваются в течение некоторого времени работой внутри окружности, проводя в ней розетки всех форм и используя соответствующие цвета. Момент, когда ученик осмеливается выйти в первый раз за пределы круга и пытается рассматривать пространство вне круга, как возможное для использования при помощи других концентрических кругов, или для получения других центров, или для трансляции, или для получения построения различных кругов, является важным в его эволюции.

Учитель, который был настолько терпелив, чтобы потерять эти первые уроки и не ожидать от них больше того, что они могут дать, очень быстро поймет, какое значение имеют эти занятия для его учеников, которые имеют теперь работу непосредственную и легкую.

Эта остановка в начале первого года имеет большое значение для создания отношения доверия между учителем и учениками, признаваемое всеми психологами как нечто существенное в акте преподавания и которое, к сожалению, очень часто не учитывается традиционной методикой.

Сделать циркуль дружественным и близким предметом, способным производить множество таких различных и таких привлекательных для учеников объектов, означает дать в руки учителя большой козырь в отношениях с классом.

Но есть нечто большее в нашем предложении. Вся математика, которую ученик будет изучать, будет связана с тем, что он делает около себя на его листочке бумаги, и с тем, что составит позднее евклидову геометрию. Пространство, которое он будет выражать структурами, будет им лучше понято, потому что круги, а не прямая были его первыми инструментами по отношению к структурам. Ограниченность круга есть нечто более прочное и более заманчивое, чем бесконечность плоскости, которую, кстати сказать, ученики понимают очень поздно.

Таким образом, начало нашего геометрического преподавания есть свободная эксплуатация того, что можно организовать с помощью циркуля на листке бумаги.

Как только мы будем уверены, что ученик вполне освоился с организацией круглых фигур, мы можем ввести то, что мы называем «математические положения». Очевидно, что их имеется множество, и никто не может надеяться найти в такой статье, как эта, больше, чем простое указание, как это нужно сделать. Примеры объяснят,

что мы подразумеваем под этим словом и какой метод мы провозглашаем.

В начале школьной геометрии мы будем следовать двумя путями (пути, которые нетрудно поменять местами):

1. Получив семейство концентрических окружностей и увидев, что окружности в этом случае определяются их радиусами и что можно построить бесконечное множество таких окружностей, предлагают изучить, что произойдет, если рассматривать два таких семейства с двумя различными центрами A и B .

При этом, в частности, может оказаться:

а) множество пар равных окружностей, когда они пересекаются, определяют точки пересечения, лежащие на одной прямой, и эта линия есть медиатриса центров;

б) пары окружностей будут или внешние по отношению друг к другу, или касающиеся извне, или пересекающиеся, или если они не равны, касающиеся внутренне, или одна содержится в другой более чем в трех различных положениях; [52]

в) пары равных окружностей, которые пересекаются, приводят к построению медиатрисы отрезка;

г) пары неравных окружностей приводят к условию, необходимому и достаточному для построения треугольника, в котором известны три стороны;

е) построение этого треугольника.

Выражая полученные отношения в частном случае б), образуем новое положение, в котором выделяют одну окружность из семейства окружностей и, присоединяя ее к совокупности окружностей другого семейства, приходят к алгебраическим соотношениям, выражающим всевозможные случаи, в которых окружности могут находиться относительно друг друга. Этот метод гораздо более приемлем для учеников, чем классическое исследование, и мы видим, что построение треугольника или его свойства, выражаемые неравенством, обозначают ту же проблему, как и для окружностей.

Естественно, встречается такое очевидное расширение понятий, как изучение трех семейств концентрических кругов; получение геометрических мест, когда берут точки пересечения окружностей, если сумма или разность их радиусов постоянна. Но кажется нет необходимости доводить это положение до конца. Достаточно предоставить ученикам извлечь из построенных таким образом положений математические факты (или отношения), которые очевидны.

2. Берем единственный круг C и находим, что можно построить только шесть окружностей таким образом, что центры их будут на окружности C , а радиусы те же, что и у C , и так, что их центры определяют правильный шестиугольник и шесть равносторонних треугольников, имеющих одну общую вершину в центре C , а одной из сторон — сторону шестиугольника.

Эта фигура (окружность C , шестиугольник H и его диагональ)

имеет богатое содержание, из которого мы выбираем следующие соотношения:

а) прежде всего она представляет симметрии по отношению к центру и к определенным диагоналям;

в) вращения, полученные умножением одной шестой части окружности на целое положительное или отрицательное число, приводят фигуру к совпадению с самой собой;

с) многоугольники, составленные из треугольников, а следовательно, части шестиугольника могут быть названы: равнобедренная трапеция, ромб. Они также совмещаются путем вращения; указанного выше;

д) если мы возьмем диагонали этих четырехугольников, то получим новые свойства: в частности, два вписанных в окружность равносторонних треугольника, стороны каждого из них перпендикулярны к трем из девяти диагоналей шестиугольника; четырехугольники, образуемые одним из равносторонних треугольников и равнобедренным треугольником, образуемым двумя сторонами H ; прямоугольные треугольники, вписанные в полуокружности; прямоугольники, образуемые двумя параллельными сторонами H и двумя параллельными диагоналями.

Можно абстрагировать какую-нибудь из этих фигур, подвергнуть ее вращению, чтобы получить новые данные. Все это легко осуществляется материально при помощи того, что мы называем «геоплан» и который попутно применяют.

Надо заметить, что этот начальный круг допускает бесконечную группу вращений вокруг центра, тогда как полученный из него шестиугольник допускает группу вращений порядка 6.

Этот пример интересен, таким образом, с алгебраической точки зрения и дает возможность ввести в обучение фундаментальные структуры.

В рассмотрении данной фигуры нас интересует возможность учеников организовать свое восприятие и активный эксперимент. Новое положение может быть получено, если возьмем вновь окружность S и один из равных кругов, центр которого лежит на окружности S . Общей хордой будет одна из диагоналей H (и одна из сторон равностороннего треугольника). Фигура будет симметрична по отношению к линии центров и по отношению к общей хорде, отсюда следует взаимная перпендикулярность этих двух прямых. Нарушая немного симметрию и только требуя, чтобы вторая окружность сохраняла свой центр, но не свой радиус, получим, что общая хорда, а также и все семейство прямых остается перпендикулярным линии центров и делится ею на две равные части. Перемещая на этот раз центр, приходят к частному случаю 1, когда вторая окружность будет равна или нет первой.

3. С помощью окружностей и прямых можно очевидно производить всевозможные конструкции, содержащие многочисленные новые отношения.

Трансляция окружности вдоль прямой образует семейство, которое покрывает полосу, ограниченную двумя прямыми, параллельными линии центров.

Движение окружности, центр которой перемещается по окружности постоянного круга, покрывает область, ограниченную двумя концентрическими окружностями, радиусы которых легко определить. [53]

Если же оставить неподвижной общую хорду, то центры двух окружностей, которые проходят через ее концы, будут расположены на прямой, проходящей через середину хорды и перпендикулярной к ней. Рассматривая постоянный круг и семейство параллельных прямых одного и того же направления, можно эти параллельные подразделить на три класса: пересекающие окружность, не имеющие ни одной общей точки с окружностью и разделяющие их (их имеется всего только две), которые касаются окружности. Так как направление прямых не играет никакой роли в этом подразделении, то получаем пары прямых, касающихся окружности, и видим, что они попарно параллельны и перпендикулярны к диаметру, проведенному в точке касания.

4 Обращая положение, можно рассмотреть семейство кругов, касающихся данной прямой в данной точке, или семейство кругов, касающихся данного круга, рассматривая, в частности, случай, когда точка касания будет неподвижной.

Этот эксперимент с семействами прямых или кругов позволит ввести динамику в положение и получить различными методами математические предложения или найти инварианты, как особый частный случай в семействе отношений.

Все это воспитывает умение производить математические наблюдения и изобретать¹.

Но это позволяет также воспитывать строгость, рассматривая ее, как отсутствие двусмысленности и сомнений в высказываниях.

Действительно, так как каждый ученик говорит только о том, что он видит или над чем он умственно экспериментирует, мы можем настаивать на том, чтобы он выражал то, что он осознает, и чтобы он точно передавал другим то, что он доказывает.

Учитель, являясь посредником в классе, часто может преобразовать высказывание ученика в предложение, смысл которого совершенно отличен от того, какой придавал ему сам ученик. Например, вначале ученики довольствуются тем, что говорят, что квадрат есть фигура с четырьмя равными сторонами, а учитель неожиданно для них рисует сначала четыре равных отрезка в произвольном положении, а потом, после некоторой дискуссии, — сильно растянутый ромб.

Этот метод, без сомнения, очень распространенный, показывает ученикам, что математическое предложение, имеющее два смысла,

¹ Здесь уместно использование кино, как это сделали, например, Николе и Флетчер.

не имеет ни одного. Лишь только станет понятной эта мысль, урок математики становится уроком языка, на котором учитель должен добиться того, чтобы сознание учащихся не оставалось на интуитивном уровне. Но передача мысли зависит не только от словесного оформления. Необходимо чувство, обуславливающее возможность выразить точно то, что мы хотим сказать, и это придает словесным сообщениям строгость, особенно необходимую для математиков. Когда приняты навыки такого рода, то можно спросить себя, в какой же момент можно начинать излагать предмет аксиоматически, со строгими доказательствами.

Большинство преподавателей считают, что их задача заключается в том, чтобы научить логически рассуждать и притом какой угодно ценой. Чтобы удовлетворить это желание, мы приводим два замечания.

С одной стороны, мы спросим себя, не можем ли мы создать такое положение, когда ученик будет делать самостоятельно попытки в совершенно различных направлениях для того, чтобы осознать то, что он воспринял интуитивно. Например, если он строит фигуру или рассматривает пример, который он легко разрешает, попросите его преобразовать свой метод в подобный, но в то же время отличающийся от первого. Это, например, можно сделать, предложив ему провести две хорды из одной и той же точки окружности и рассмотреть диаметр, выходящий из этой точки. Некоторые ученики проведут диаметр между хордами, у других хорды окажутся по одну сторону от диаметра. Попросим учеников рассмотреть эти фигуры с общей точки зрения. Если это будет относиться к углу, образуемому хордами, то в одной фигуре нужно сложить углы, образуемые хордами с диаметром, в другом случае их вычитают друг из друга. В результате мы получаем предложение, отображающее соотношения, независимые от данной фигуры, и строгие в собственном смысле этого слова.

Нам кажется, что такого рода упражнения можно проводить во всех случаях, встречающихся в школьной программе, и воспитывать умение выражать свои мысли так, что высказывание уже не будет содержать никакой двусмысленности.

Чистый аксиоматический метод может быть достигнут только в результате длительного эксперимента, но принцип естественной экономии и в интеллектуальной деятельности может указать ученикам на возможность некоторой аксиоматизации их собственного опыта. Например, довольно скоро усваивается привычка избегать повторений, откуда следует стремление рассматривать установленное предложение, как раз и навсегда данное, и делать из него непосредственные выводы. Возвращение к предшествующему случаю, уже установленному, представляется как нормальный путь, и это движение от искомого к ранее известному становится тоже понятным.

Ставить вопрос о том, какие постулаты были бы достаточны для того, чтобы построить дедуктивную систему, есть роскошь, которую наука может себе позволить, только накопив достаточно фактов.

Это можно оставить для заключительных школьных экзаменов. К тому же, как нам кажется, имеется большая опасность в том, что мы хотим одеть математический эксперимент в аксиоматический камзол. Не всякое неизвестное есть результат дедукции от известного. Мода требует, чтобы сегодня математическая мысль была одета в аксиоматику. Прежде всего не все можно аксиоматизировать, а, кроме того, если математик может сознательно подчиниться этому требованию, когда он делает свои открытия, то мы не видим никаких оснований спрашивать с наших учеников строгие формулировки до того, как в их сознании не сделалось совершенно ясным то, что они хотят сообщить.

С другой стороны, мы считаем нужным сделать второе замечание, которое является очень важным. Геометрия, которую мы преподаем, есть геометрия на листе бумаги. В полученных нами соотношениях мы отвлекаемся от этого и находим новые соотношения путем абстракции, в силу чего они кажутся независимыми от наших действий. Ученик не спрашивает себя, где эти соотношения справедливы.

Так как все ученики находят одни и те же геометрические соотношения, эти соотношения приобретают универсальность в классе (т. е. в классной комнате), и так как кажется, что соотношения не зависят от того, в каком географическом месте находится класс, они кажутся ученику и учителю (для первого менее сознательно) действительно универсальными. На самом деле это не так. Все, что мы можем сказать, это, что наши соотношения, полученные из рассмотренных изображений на бумаге, локально правильны всюду на Земле.

Наш метод выявления соотношений из рассмотрения положений позволяет сделать геометрию локально истинной без того, чтобы появилась необходимость говорить о пространстве в целом. Действия, которые являются преобразованиями, позволяют получить новые соотношения в положениях.

Так как предложения геометрии относятся только к соотношениям, нет никакой трудности говорить о бесконечной длине, о бесконечном пространстве и т. д., которые представляют собой частный случай соотношений и не являются физической реальностью.

В частности, евклидов параллелизм есть соотношение эквивалентности*, которое нужно для того, чтобы выделить особый случай расположения двух прямых.

Это второе замечание ставит наше преподавание в положение, которое мы считаем более здоровым, более соответствующим действительности нашей мысли и наших действий, и которое, может быть, заставит учеников избежать неправильного представления о том, что сумма внутренних углов треугольника есть результат абсолютных измерений в абсолютном пространстве. [54]

* О соотношении эквивалентности см. предыдущую статью Шока.

Мы осмеливаемся сказать, что много чернил было потрачено напрасно по вопросу о геометрии и об эксперименте и что вопрос является скорее психологическим недоразумением, чем глубокой философской проблемой. На самом деле мы бессознательно относим найденные нами геометрические соотношения к пространству, содержащему геометрические объекты. Подобно тому как геометрические соотношения являются результатом умственного эксперимента, пространство тоже является соотношением, построенным исходя из совокупности других соотношений и имеющим свои определенные свойства, иногда как действительно присущие ему, иногда также являющиеся результатом чисто умственного эксперимента. Если пространство есть множество, организованное по известным правилам, то его надо рассматривать как соотношения, а свойства его подмножеств являются тоже частными соотношениями, составляющими геометрию. [55]

Евклидовы свойства пространства, как и другие, являются умственной конструкцией, которая осуществляет определенный психологический эксперимент, являющийся результатом изучения положений на бумаге и соотношений, которые мы из них абстрагируем. Если эти соотношения таковы, что они всегда верны в евклидовой геометрии, то психологическое пространство будет локально евклидовым, каковыми к тому же будут и большинство пространств, используемых в математике.

Отсюда мы можем понять, что же именно является предметом доказательства в математических предложениях. Странно видеть, что преподаватели верят в трансцендентные качества геометрических доказательств и что они воображают, что интуиция, подкрепленная доказательством, приобретает какую-то ценность.

Мы доказываем наше предложение, относя его к другим, которые нами были приняты. Мы допускаем, что они были выбраны разумно, хотя и внематематически, и мы признаем все значение редукции, которую применяют твердые логические правила.

Наши ученики тоже делают редукцию того же рода, но, вместо того чтобы подняться до умозаключения, они идут непосредственно к примитивному эксперименту. Наблюдение за равенством на практике не заставляет их обосновать это равенство. Есть специальная логика в очевидности, которая не играет никакой роли в уме учителя, но является суверенной для ученика. К тому же учитель прилагает эту же самую логику даже тогда, когда он объявляет, что у него насморк. Ученику ничего не требуется, кроме этой очевидности, если положение разрешает ему этим удовлетвориться. Отсюда следует, что только в деятельности заключается возможность заставить ум ученика требовать чего-то другого от него самого, и в частности развития логики предложений. Эта последняя имеет также свои границы и должна будет замещена другой логикой в случаях многочисленных отношений, где могут иметь место положения, в которых A и не A одновременно истинны, или где двух терминов недостаточно, чтобы сделать реальный вывод.

Наше преподавание должно опираться на эксперимент, на передачу мыслей и на формирование интеллектуальной личности ученика, чтобы различные принципы воспринимались им согласно уровню его математического сознания.

Вот несколько примеров уроков, которые иллюстрируют нашу точку зрения.

(1) Произведем следующее построение. Отрезок AB отмечен каждым учеником на листе бумаги и из его середины M проведена полупрямая L (рис. 6). На ней, на расстоянии довольно большом по сравнению с AB , взята точка P , которая соединяется с A и B . Угол APB будет, очевидно, острым. Ставим вопрос: «Что произойдет, если возьмем точку P' на L дальше, чем P от M , и если соединим ее с A и B ?» Ответ приходит тотчас же: угол $AP'B$ будет меньше, чем угол APB , и чем больше удаляется точка от M , тем угол становится меньше. Если теперь точка Q будет очень близко от M на L , то каков будет угол AQB ? Он будет тупым, и всякая точка Q' между Q и M определит угол больший, чем AQB . Таким образом, все точки на L подразделяются на те, которые определяют углы острые, и те, которые определяют углы тупые. Первые более удалены от M , чем вторые. Если P и Q стремятся друг к

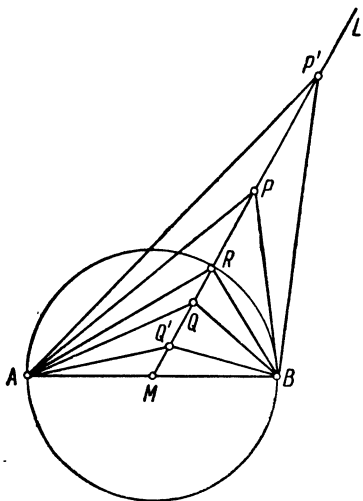


Рис. 6.

другу таким образом, что \widehat{APB} будет все время острый, а \widehat{AQB} всегда тупой, то что можно сказать об их предельном положении?

Чтобы помешать интуиции увлечь учеников сразу к заключению (которое будет корректным в данном случае), что имеется только

одно положение с прямым углом \widehat{ARB} , надо дать им заметить, что отношения «ближе» или «дальше» очень смутны и что требуется гораздо более точное определение. Например, если проведем окружность с диаметром AB , то появятся новые соотношения в форме «внутри» окружности или «вне» окружности, или «на» окружности. Эти две пары соотношений: ближе (или внутри круга) и угол AQB — тупой и дальше (или вне круга) и угол APB — острый, рассматриваются одновременно, и ученики видят, что фигура APB становится орудием доказательства (при помощи двух равнобедренных треугольников ARM и RMB), что угол ARB есть прямой и что углы AQB все тупые, потому что все они больше, чем ARB , а углы APB острые, потому что они меньше. Одним словом, мы ус-

тановили несколько результатов и показали, что соотношение «угол вписанный в полукружность есть прямой» есть частный случай множества значений углов, опирающихся на A и B с вершиной на L .

Если L принимает другое положение, то, так как полученные соотношения не зависят от выбора L , результаты останутся справедливыми для каждой полупрямой, выходящей из M .

(2) Возьмем вновь круг с диаметром AB и прямую L , и вместо этого диаметра возьмем два радиуса AM и MB . Они находятся на одной прямой. Что произойдет, если они не будут на одной прямой? Пусть фигура $ARBMA$ (рис. 7) будет невыпуклым четырехугольником с $AM = MB = MR$, тогда угол ARB не будет прямым.

Как можем мы привести предыдущее положение с прямым углом к тому, чтобы преобразование, которое мы произведем над новой фигурой, привело нас к одному и тому же результату в обоих случаях. Здесь необходимо, очевидно, обратить внимание на соотношение угла, находящегося при точке M с углом ARB . Задача заключается именно в том, чтобы заставить учеников самим сделать это перенесение. Когда это достигнуто, теорема о вписанных углах будет доказана, а случай с прямым углом может быть рассмотрен с двух различных точек зрения. [56] Доказательство в случае прямого угла прямо подводит к теореме о медиане прямоугольного треугольника, потому что действительно здесь идет вопрос о двух равнобедренных треугольниках, которые приводят к доказательству во всех случаях.

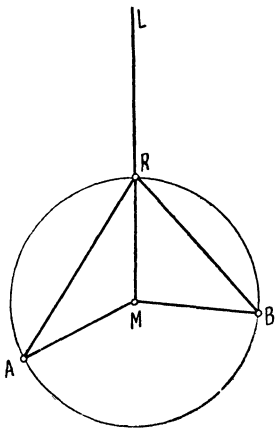


Рис. 7.

Здесь также изучение положения позволяет найти несколько соотношений в одно и то же время, потому что углы AQB и APB первого положения могут быть взяты вновь и вращение L вокруг M даст все рассмотренные случаи.

Теоремы об углах, вписанных в один и тот же сегмент, о вписанных четырехугольниках, об углах сегмента, следуют из динамизма положения и не являются изолированными фактами, предугадать которые может только высший ум.

(3) Другое положение, связанное с предыдущим, может помочь объединению нескольких теорем и задач.

Рассмотрим некоторый треугольник ABC и прямую, соединяющую A с какой-нибудь точкой M между B и C (рис 8). Фигура содержит три треугольника: ABC , AMB и AMC . Строим симметричные треугольники: PBC с ABC относительно BC , NAB с AMB относительно AB , QAC с AMC относительно AC и мы видим, что

площадь $PBC =$ площади $NAB +$ площадь QAC . Если из P, N, Q соответственно проведем параллельные к BC, AB, AC и выберем P', N', Q' произвольно на этих прямых, то будем иметь, что площадь $P'BC' =$ площади $N'AB +$ площадь $Q'AC$.

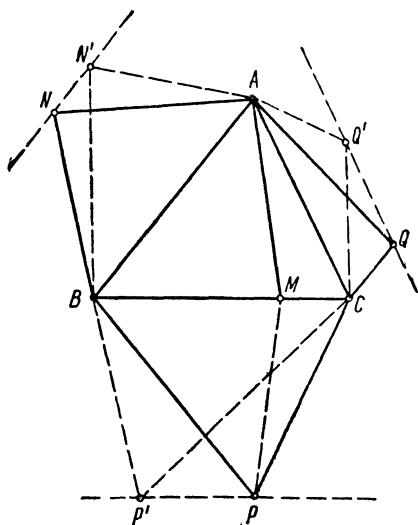


Рис. 8.

В этом частном случае, когда \hat{A} будет прямым и M — основанием перпендикуляра из A на BC (рис. 9), треугольники ABC

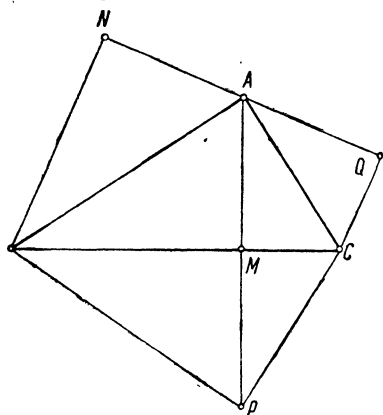


Рис. 9.

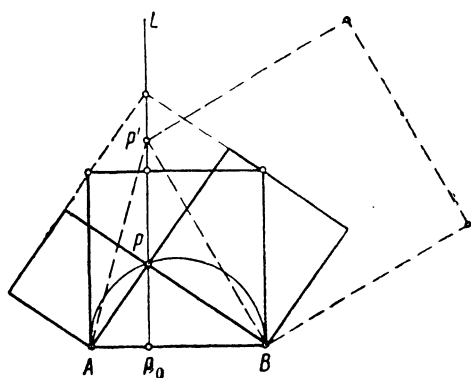


Рис. 10.

AMB, AMC подобны, и это свойство определяется только положением точки M .

В случае прямого угла можно заменить эти треугольники какими угодно подобными фигурами, построенными на сходственных отрезках AB , AC и BC , и это потому, что $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (предложение, которое вытекает из подобия вышеуказанных треугольников). [57]

Конечно, можно найти это предложение (Пифагора) другим методом, производя ту же операцию, но используя только определение площади квадрата.

Исходя от неподвижного квадрата Q_0 (рис. 10), выбираем точку P_0 на одной из его сторон, например на AB . Из P_0 восставим перпендикуляр L к AB и применим замечания § 1. Если P очень уда-

лена от P_0 , угол \widehat{APB} острый, если P' очень близка к P_0 , он почти равен двум прямым, этим вновь определятся два класса точек на L . Строим квадраты на PA и PB соответственно Q_1 и Q_2 . Если P очень удалена, то каждый из этих квадратов будет больше, чем Q_0 , т. е. $Q_0 < Q_1 + Q_2$. Если P совпадает с P_0 , то $Q_0 > Q_1 + Q_2$. [58] То же самое имеем с P' при малом расстоянии от P_0 . Эти два противоположных равенства связаны с предыдущим замечанием об острых и тупых углах, и мы имеем предварительно следующие соотношения:

Если \widehat{APB} очень острый, $Q_0 < Q_1 + Q_2$.

если $\widehat{AP'B}$ очень тупой, $Q_0 > Q'_1 + Q'_2$.

Что произойдет, если мы будем сближать точки P и P' ? Q_1 и Q_2 уменьшатся, Q'_1 и Q'_2 увеличатся, две величины стремятся навстречу друг к другу. Кажется, что имеется по крайней мере одна точка на L , где $Q_0 = Q_1 + Q_2 = Q'_1 + Q'_2$, и кажется, что для

этой точки $\widehat{APB} = \widehat{AP'B} = \text{прямому}$.

В предыдущем изложении 1 и 2 мы видели, что окружность с диаметром AB пересекает L в точке, где $\widehat{APB} = d$, и что внешние точки относительно этой окружности образуют острые углы, а точки внутренние — тупые. Отсюда следует, что точка L , где сумма площадей квадратов, построенных соответственно на сторонах

AP и PB , равняется Q_0 и есть такая, когда угол \widehat{APB} — прямой

Так как всякая другая точка на полуокружности имеет это свойство, то сумма переменных площадей этих квадратов постоянна и равна Q_0 .

Теорема Пифагора получается в двух случаях: когда две серии противоположных неравенств обращаются в равенство и когда на сторонах прямого угла строят подобные фигуры, именно квадраты.

(4) Наряду с этими уроками, представляющими сложные комплексы, дадим серию уроков, относящихся к делению отрезка (основной теореме 11 книги евклидовой геометрии).

Эти уроки, данные ученикам 14 лет, задуманы так, что не предполагается никаких предварительных сведений, и потому они содержат отступления, в которых описываются необходимые факты.

Читатель может их рассматривать как совокупность независимых уроков, цель которых узнать, до каких границ можно дойти, позволяя вести себя классу.

Исходим от отрезка AB , помещенного на прямой с произвольной ориентацией на листе бумаги, — длина AB произвольна (рис. 11).

Предлагаем отметить точку C — середину AB , D — середину AC и E — середину CB . Вычисляем отрезки AD , AE как функции от AB и находим $AD = \frac{1}{4} AB$,

$AE = \frac{3}{4} AB$. Продолжаем деление, вво-

дя другие точки, делящие пополам имеющиеся интервалы. Дробь, которые получаются, довольно просты. Переходят к дробям знакомым, но менее распространенным, как $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{11}{13}$. Каждый раз находят до-

полнительные дроби ($\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ и т. д.), которые измеряют отрезок и его дополнение на AB при помощи отрезка AB .

Если перейдем теперь к такой точке γ , что $A\gamma = \frac{h}{k} AB$, и если предложим измерить отрезок $A\gamma$ при помощи отрезка γB ,

сначала в случае простых дробей, а после, найдя отношение $\frac{h}{k}$, найдем $A\delta = \frac{h}{k-h} \delta B$. Потом мы используем другие буквы и другие дроби, например $A\delta = \frac{1}{f} AB$, и, определяя $A\delta$ в частях от δB , найдем $A\delta = \frac{f}{f-1} \delta B$. Правило, выведенное учениками, выявляет-

ся как результат операций приемлемых и очевидных.

Выбрав $A\beta = \sigma AB$, выразим $A\beta$ в частях βB . Прежде всего отметим равенство отношений $A\beta = \sigma AB$ и $\frac{A\beta}{AB} = \sigma$ и что всегда имеем: $AB = A\beta + \beta B$. Поэтому

$$A\beta = \sigma (A\beta + \beta B) = \sigma A\beta + \sigma \beta B \text{ и } A\beta - \sigma A\beta = \sigma \beta B \text{ или } A\beta (1 - \sigma) = \sigma \beta B$$

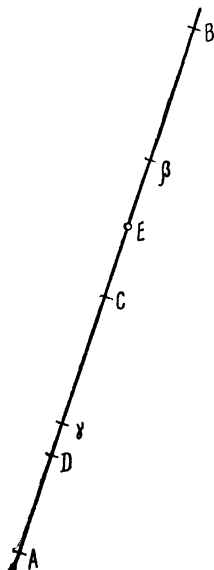


Рис. 11.

эквивалентно $\frac{A}{\beta B} = \frac{\sigma}{1-\sigma}$.

Другой метод выведения этого результата получают из $\frac{A\beta}{AB} = \frac{\sigma}{1}$ или $\frac{A}{\beta B} = \frac{\sigma}{1-\sigma}$, вычитая соответственно числители дробей из их знаменателей.

Перед этим замечанием нужно установить свойства пропорции или алгебру соотношения $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Эта последняя дает:

$$\text{I)} \quad ad = bc \text{ или } da = cb \text{ и } \frac{a}{c} = \frac{b}{a}, \text{ или } \frac{d}{c} = \frac{b}{a}, \text{ или } \frac{d}{c} = \frac{c}{a},$$

и обратно.

$$\text{II)} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}.$$

$$\text{III)} \quad \frac{a}{b} \pm k = \frac{c}{d} \pm k \text{ или } \frac{a \pm kb}{b} = \frac{c \pm kd}{d}$$

и те, которые получаются из эквивалентных форм.

Что произойдет с дробью $\frac{m}{n}$, если по произволу изменять ее члены? Можно ли знать, в каком направлении она будет изменяться, если n будет постоянным, а m увеличивается или уменьшается или если m будет постоянным, а n увеличивается или уменьшается? Что произойдет, если n и m будут изменяться: а) в противоположных направлениях, в) в одном и том же направлении? Этот вопрос полон педагогического значения и освещает с новой точки зрения те трудности, которые он заключает в себе.

По правде сказать, они обширны, и учителя только подозревают о них. Очевидно, необходимо хорошо это понять, прежде чем приступить к изучению основной теоремы, содержащей деление данного отрезка в данном отношении.

Переходим теперь к отрезку AB , на котором обозначают середину M и на котором берут P произвольно. Ученики видят, что имеется только пять возможных случаев на этом отрезке: на A , между A и M , на M , между M и B и на B . Мы предлагаем выразить эти соотношения, используя отношение $t = \frac{AP}{AB}$, и потом, используя отношение $r = \frac{AP}{PB}$. Так как мы выразили одно в функции

другого, нам остается один метод проверки нашего результата:

Если P совпадает с A : $AP = AA = 0$ и $\frac{AA}{AB} = 0$ или $t = 0$.

Если P совпадает с M : $AM = \frac{1}{2}AB$, $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}$ или $t = \frac{1}{2}AP < \frac{1}{2}AB$.

Если P между A и M : $AP < AM = \frac{1}{2}AB - \frac{AM}{AB} < \frac{1}{2}$ или $t < \frac{1}{2}$.

Если P между M и B : $AP > AM = \frac{1}{2}AB$, $AB > \frac{1}{2}AB$.

$$\frac{AP}{AB} > \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad t > \frac{1}{2}.$$

Если P совпадает с B : $AP = AB$ и $\frac{AP}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1$ или $t = 1$.

Эти результаты получаются довольно быстро и могут быть выражены следующей таблицей:

	A	M	B
	P на A , P между A и M , P на M , P между M и B , P на B		
Отношение $\frac{AP}{AB} = t$	$t = 0$	$0 < t < \frac{1}{2}$	$t = \frac{1}{2}$
		$\frac{1}{2} < t < 1$	$t = 1$

Отношение устанавливает вполне определенные значения для t , когда P совпадает с одной из точек A , M , B и определяется неравенствами, когда P находится в одном из промежутков между ними.

Применяя к отношению $r = \frac{AP}{PB}$ предыдущее замечание об изменении дроби с изменением ее членов, мы можем получить соответствующую классификацию:

Если P совпадает с A : $AP = AA = 0$ и $PB = AB$, поэтому $r = \frac{AA}{AB} = 0$.

Если P совпадает с M : $AP = AM$ и $PB = MB$, поэтому $r = \frac{AM}{MB} = 1$.

Если P совпадает с B : $AP = AB$ и $PB = BB = 0$, поэтому r нельзя вычислить.

Если P между A и M : $AP < AM$ и $PB > MB$, значит, $AP < PB$, поэтому $r = \frac{AP}{PB} < 1$.

Если P между M и B : $AP > PB > MB$, значит, $AP > PB$, поэтому $r = \frac{AP}{PB} > 1$.

Необходимо заметить, что при непрерывном движении точки P от A к B на промежутке от A к M r постоянно возрастает от 0 до 1, а на промежутке от M к B , r принимает постоянно возрастающие значения, большие единицы. Эта дробь увеличивается неограниченно по мере приближения точки P к B . Говорят, что для точки B она становится бесконечно большой (что обозначается знаком ∞), указывая этим, что, как бы ни было велико данное число K , между M и B найдутся точки, для которых $r = \frac{AP}{PB} > K$. Резюмируем это следующей таблицей:

A	M	B
$r = 0$	$0 < r < 1$	$r = 1$
$0 < r < 1$	$r = 1$	$1 < r < \infty$
$0 < r < 1$	$1 < r < \infty$	$r = \infty$

Отношение P на A , P между A и M , P на M , P между M и B , P на B

$$r = \frac{AP}{PB},$$

Сравним наши две таблицы. Мы имеем, что $r = \frac{t}{1-t}$, поэтому

$$\text{при } t = 0, \quad r = \frac{0}{1} = 0; \quad \text{для } t = \frac{1}{2}, \quad r = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

При $t = 1, r = \frac{1}{0}$, что мы записываем $r = \infty$.

Более того, если $0 < t < \frac{1}{2}$; $1 - t > \frac{1}{2}$; $\frac{t}{1-t} < 1$.

Если $\frac{1}{2} < t < 1$; $1 - t < \frac{1}{2}$; $\frac{t}{1-t} > 1$.

Обратно, из $r = \frac{t}{1-t}$ получают $t = \frac{r}{1+r}$ и для $r = 0, t = \frac{0}{1} = 0$. Если $r_1 = 1$, то $t = \frac{1}{2}$.

Если $r = \infty$, то, так как $t = \frac{1}{1 + \frac{1}{r}}$ и $\frac{1}{r} = 0, t = 1$.

Более того, если $0 < r < 1$; $1 < 1 + r < 2$ и $0 < t = \frac{r}{1+r} < \frac{1}{2}$.

Если $1 < r$; $2 < 1 + r$ и $\frac{1}{2} < t = \frac{r}{1+r} < \frac{1}{1+1} < 1$.

Нам остается теперь рассмотреть две проблемы:

1) Что произойдет, если мы не ограничимся конечным отрезком AB на прямой?

2) Можно ли изучить эти соотношения одновременно и изнутри и извне отрезка AB ?

Очевидно, можно поставить P слева от A и рассматривать длины PA и PB . PA будет всегда меньше, чем PB . Точно так же с правой стороны от B PB будет всегда меньше, чем PA .

Если же мы ограничимся отношением длин $\frac{PA}{PB}$, P будет налево от A , если дробь будет меньше 1, и направо от B , если она будет больше 1 на A , если $\frac{PA}{PB} = 0$, и на B , если $\frac{PA}{PB} = 0$.

¹ Дискуссия на эту тему не может быть проведена строго на этом уровне, и мы ее излагаем здесь менее интуитивно, чем это могут сделать учителя в классе.

Но если мы рассмотрим фигуру, то мы увидим, что когда мы начинаем движение от A и кончаем на B , проходя через P , то P будет внутри AB , если отрезки AP и PB не лежат один на другом, и вне, если они лежат.

Векторы \vec{AP} и \vec{PB} имеют одно и то же направление, если P находится между A и B , если же они имеют противоположное направление, то P находится вне отрезка AB .

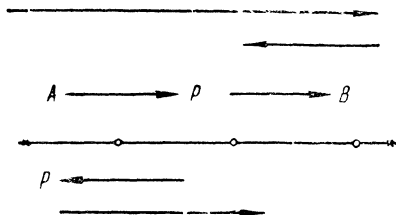


Рис. 12.

Мы имеем случай ввести определение абсолютной величины числа (или длины вектора) и изучить, что происходит с абсолютным значением отношения $r = \frac{AP}{PB}$, рассматриваемом в двух положениях: r будет положительным для P между A и B и отрицательным для P направо от B или налево от A .

Возьмем какое-нибудь определенное значение для r . По его знаку мы узнаем, будет ли P между A и B или вне отрезка AB . Но его абсолютное значение нам скажет более точно о его положении относительно M . Если $0 < |r| < 1$, то точка P находится налево от M , если же $|r| > 1$, то направо. Это уточнение позволит нам сделать два шага дальше. С одной стороны, если рассматриваем крайние случаи, то мы видим, что (обозначая через P и Q две точки, которые соответствуют двум противоположным значениям r), если P и Q перемещаются в противоположных направлениях, исходя от A , и в одно и то же время, то, если P стремится к M , то Q бесконечно удаляется от A . Если же P приближается к B , то и Q приближается к B .

С другой стороны, мы имеем теперь дело с парами точек (P, Q) , которые связаны между собой и по отношению к A и B таким образом, что их отношение $\frac{AP}{PB}$ и $\frac{AQ}{QB}$ равны по абсолютному значению, но противоположны по знаку. Это порождает совокупность точек, гармонически сопряженных посредством соотношений $\frac{AP}{PB} : \frac{AQ}{QB} = -1$, где отрезки будут теперь ориентированы.

Резюмируя, мы имеем:

Q	A	P	M	P'	B	Q'
$r < 0$			$r > 0$			$r < 0$
	$r = 0$		$r = 1$		$r = \infty$	
$ r < 1$						$ r > 1$

Ученики, усвоив это, знают теперь достаточно конкретно и детально, что из себя представляет математическое предложение, о котором мы хотим знать более или менее глубоко. Оно ставит проблемы, как только мы пытаемся освободиться от начальных ограничений. Эти ограничения не приняты во внимание не потому, что нужно идти дальше по программе, но потому, что они не обязательны.

Нам кажется, что мы дали достаточно примеров для того, чтобы наши педагогические концепции были вполне хорошо иллюстрированы.

Для нас педагогика есть область творческой активности учителей, и мы надеемся, что показали, как нужно сделать труд новым, если мы ставим себе задачей осуществить на уроке синтез существующих математических структур мышления учеников.

Конечно, в средней школе мы ограничены в преподавании тем, что должны дать лишь основы алгебры и геометрии. В других работах мы коснемся других областей математики.

Уже в совместной работе с Жоржем Кюизенером¹ мы показали, что функционирующие программы вполне реальны и синтез не является более трудным на уровне начальных школ или университета, чем на уровне средних школ, рассматриваемых выше.

Геопланы.

Когда эта глава была написана, мы имели возможность экспериментировать с ценным геометрическим материалом, который называли геопланы. Таким образом, мы видим, что можно найти и другие способы, кроме тех, которые указаны в нашем тексте, чтобы дать ученикам геометрический эксперимент. Мы задумали серию досок, на которых имеются отверстия, образующие различные решетки, квадраты, пятиугольники, шестиугольники и т. д. Эластичные цветные нити тянутся от одной к другой из этих точек и можно получить различные геометрические фигуры по выбору подмножеств точек, связанных этими эластичными нитями.

¹ Жорж Кюизенер и Калев Гаттенхо «Числа в красках», изд. французское и швейцарское, 1955.

Georges Cuisenaire et Caleb Gattegno. Les nombres en couleurs, Édition française et suisse, Delachaux et Niestlé, Neuchâtel et Paris, 1955.

Легко видеть, что при помощи одной такой нити можно получить различные фигуры и что надо несколько досок с различными решетками, чтобы могли быть различные изображения, например правильные треугольники или многоугольники. Можно оценить плодотворность этого материала временем, которое затрачивали искусные математики, чтобы исчерпать содержимое каждой плоскости; некоторые плоскости были у них в руках в течение 6 — 10 часов. Мы сами использовали более 30 страниц, чтобы описать все возможности геоплана I (квадратная решетка с 9 точками), и более 120 — для геоплана VI (квадратная решетка с 16 точками); наоборот, геоплан V (решетка с 6 точками), образуемых вершинами пятиугольника с центром, быстро истощается, а геоплан II (правильный шестиугольник плюс центр) имеет свойства малочисленные и малоинтересные. Двойной шестиугольник (геоплан IV) очень богат возможностями и ставит проблемы, которые полезны в дополнение к тем, которые находятся в квадратных решетках 9(I), 16(VI) и 25(VII) точками.

Правильный восьмиугольник очень полезен по причине своего богатства и различных предложений, которые он дает.

Все эти геопланы имеют эстетическую привлекательность и признаются сразу теми, кто видел их в использовании. Они могут дать геометрический эксперимент даже детям 5 лет, предлагая проблемы формы, расстояния, симметрии, подобия, теории групп, проективной геометрии, геометрии метрической.

Их находят в продаже в различных странах под именем геоплоскостей Гаттеньо. [59]

З а к л ю ч е н и е.

Эта довольно длинная глава требует небольшого заключения.

Нам кажется, что самое главное, внесенное нами в преподавание математики, можно резюмировать так:

Класс есть наша лаборатория, и наша работа в нем должна быть творческой. Эту работу могут осуществить только преподаватели математики и в ней имеет место синтез между открытыми математиками структурами математики и открытыми психологами операторными структурами мышления.

Более того, только одни преподаватели могут подтвердить своей активной работой целесообразность применяемых методов преподавания.

Такова точка зрения учителя. А с точки зрения учеников существенна наибольшая эффективность восприятия и понимания, что приносит им удовлетворение и радость, к чему и должен стремиться учитель.

Эта глава написана тем, кто не имел другого авторитета, кроме своей личной работы в классе с обыкновенными учениками, обновляя старые методы путем обращения к исследованию детского мышления.

Март 1953 г. — январь 1954 г., Лондон.

ПРИМЕЧАНИЯ ПЕРЕВОДЧИКА.

[1] Высказанные здесь соображения автора возвращают нас к средневековому спору между «реалистами» и «номиналистами» о сущности общих понятий (в частности, математических). «Реалисты» воспроизводили идеалистические взгляды древнегреческого философа Платона, который утверждал, что общие понятия реально существуют в некоем сверхчувственном мире, а воспринимаемые нами образы предметов — лишь несовершенные отражения этих абсолютных сущностей. Номиналисты же утверждали, что общие понятия суть только слова (имена — *nomina*), которые мы присваиваем отдельным предметам. С диалектико-материалистической точки зрения общие понятия являются отображением объективно существующих свойств предметов или соотношений между предметами.

Конвенционализм — субъективно идеалистическое учение, рассматривающее понятия и законы логики и математики, как условные соглашения (*conventio* — условие), выбор которых обусловливается только соображениями удобства.

(Подробнее об этом см. в книге Н. И. Кондакова «Логика», Учпедгиз, 1954).

[2] Здесь автор вновь говорит о той же проблеме, на которую указывалось в предыдущем примечании.

[3] Подробнее о фундаментальных структурах можно прочитать в сборнике «Математическое просвещение» № 5 за 1960 г. в статье Н. Бурбаки «Архитектура математики».

[4] Перцепция, т. е. непосредственное восприятие нашим сознанием явлений материального мира через органы чувств, протекает всегда в одном и том же направлении и потому является необратимым процессом. Мышление же способно пробегать ряды своих представлений, понятий, выводов и т. д. в любом направлении и потому мыслительные процессы обратимы.

[5] Автор имеет здесь в виду четыре фигуры силлогизма, при помощи которых из двух данных суждений (посылок) выводится

новое суждение — заключение (см., например, Кондаков «Логика», Учпедгиз, 1954).

[6] Поясним сказанное здесь примером. В качестве отношения возьмем отношение принадлежности, когда множество x принадлежит множеству y , что мы будем определять словами « x предшествует y ». Тогда мы получим: $x \times y = x$ — это значит, что пересечение x и y есть множество элементов x . В то же время символ $x + y = y$ обозначает, что множество элементов, содержащее элементы x и y , есть множество y .

[7] Имея в виду ту же символику, что и в предыдущем примечании, мы увидим, что символом $AB \rightarrow A$ или $AB \rightarrow B$ можно опять-таки выразить отношение принадлежности. Действительно, если AB есть множество элементов, общих A и B , то, очевидно, что это множество принадлежит как множеству A , так и множеству B . Символ $A + B$ определяет множество элементов, принадлежащих и A и B , поэтому имеет место соотношение $A \rightarrow (A + B)$ и $B \rightarrow (A + B)$. Из тех же соображений получается и соотношение $AB \rightarrow (A + B)$.

[8] Едва ли можно с такой степенью точности (до полугода) установить момент перехода психики ребенка на новую ступень

[9] Автор использует здесь символику математической логики, познакомиться с которой можно по книге П. С. Новикова «Элементы математической логики», Физматгиз, 1957.

[10] Гештальтпсихология (от немецкого слова Gestalt — образ)— идеалистическое направление в психологии, рассматривающее психические явления с точки зрения их целостности и независимости от составляющих это явление элементов. Вторым принципом этого направления является принцип динамичности, заключающийся в том, что всякий психический процесс определяется устанавливающимися в нем динамическими соотношениями (см. Большую Советскую Энциклопедию).

[11] Символы $[F, <]$ и $[R, <]$ определяют множества, между элементами которых можно установить соотношение порядка.

[12] Автор имеет здесь в виду ряд весьма трудных проблем, возникших в математике в начале текущего столетия, в связи с противоречиями, которые обнаружились при изучении свойств бесконечных множеств.

[13] Исследования в области теории множеств показали, что в некоторых вопросах законы формальной логики (например, закон исключенного третьего) оказываются неприменимыми. Это обстоятельство заставило заново пересмотреть основы науки о мышлении и привело к ряду весьма важных открытий в области логики (см. указанную в примечании [9] книгу П. С. Новикова).

[14] Игра в «гусек» состоит в том, что игроки передвигают шашки по полям доски, причем положение шашек определяется не соображениями игрока, а номером, который случайно определяется числом очков на выброшенных игральном костях. Эта игра под-

робно описана в известном романе Ж. Верна «Завещание чудака». Автор здесь намекает на случайность и бессистемность математического материала, который предлагается для изучения.

[15] Во французской школе нумерация классов идет в обратном порядке: последний (старший) класс имеет первый номер.

[16] Указанная автором ошибка заключается в том, что нельзя охарактеризовать прямую **только одним признаком**, т. е. тем, что она определяется двумя точками, тогда как на самом деле прямая характеризуется всей совокупностью аксиом, которыми определяются соотношения между прямой и другими элементами пространства.

[17] Последний абзац вызывает крайнее недоумение. Здесь автор сравнивает геометрию с игрой (или детективным романом), правила которой (или начальные взаимоотношения между действующими лицами романа) назначаются по нашему произволу. Но это совершенно не соответствует тому, как на самом деле строится здание геометрии. Основные понятия и аксиомы геометрии — совсем не произвольны, а получены в результате тысячелетнего опыта человечества при изучении пространственных свойств материального мира. Непротиворечивость при выборе начальных аксиом обусловлена не «счастливой случайностью», а тем, что в реальной действительности существуют объекты, удовлетворяющие данной системе аксиом. Высказывание автора тем более странно, что сам он дальше строит геометрию, основные аксиомы которой он выбирает не случайно, а опираясь на эксперименты с определенными материальными объектами (бумага, карандаши, циркуль и т. д.).

[18] Приводимое ниже «доказательство» оказалось возможным только благодаря неопределенности терминов: «равные», «перемещение», «наложение».

[19] Неверное утверждение. Наряду с Гильбертовой аксиоматикой существуют и другие системы аксиом, осуществляющих классическую геометрию (например, системы Вайля, Веронезе, Тиме, Швана и т. д.). Да и сам автор в дальнейшем пользуется системой аксиом, отличной от системы Гильберта.

[20] Книга Хальстеда (G.B. Halsted. Rational geometry. New York, 1907) представляет собой попытку изложения школьного курса элементарной геометрии на строго аксиоматической основе. Однако, несмотря на безупречное с логической точки зрения изложение, курс этот непригоден для использования в средней школе ввиду его большой трудности.

[21] Под абстрактным пространством автор понимает здесь пространство R^3 , рассматриваемое как множество троек действительных чисел (x, y, z) .

[22] Пусть фигуре F принадлежат четыре не лежащие в одной же плоскости (некомпланарные) точки A, B, C, D , которые соответствуют в фигуре F' четыре тоже некомпланарные точки A', B', C', D' , причем по условию изометрии все отрезки первой фигуры рав-

ны соответствующим отрезкам второй: $AB = A'B'$, $BC = B'C'$,... и т. д.

Если P — любая точка пространства, то ею однозначно определяется соответствующая точка P' , удовлетворяющая условию: $PA = P'A'$, $PB = P'B'$, $PC = P'C'$ и т. д. Таким образом, изометрия, определенная только для фигур F и F' , может быть **продолжена** на все пространство.

Пусть фигуры F и F' — плоские и трем не лежащим на одной и той же прямой точкам A , B и C первой фигуры соответствуют точки A' , B' и C' второй фигуры так, что $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ и $CA = C'A'$. Тогда для какой-нибудь точки пространства — P (не принадлежащей F) можно построить точку P' , удовлетворяющую условию: $AP = A'P'$, $BP = B'P'$, $CP = C'P'$, с одной стороны плоскости $A'B'C'$, а можно построить с другой стороны плоскости $A'B'C'$ другую точку P'' , удовлетворяющую аналогичным условиям $AP = A'P''$, $BP = B'P''$, $CP = C'P''$, т. е. мы имеем **два продолжения** изометрии.

[23] Сначала на точки прямой отображается множество целых чисел, рациональным (дробным) числам соответствуют точки, лежащие в полученных промежутках, и, наконец, иррациональным числам соответствуют все оставшиеся точки прямой.

[24] Существование указанной автором единственной подгруппы изометрий, преобразующих точки A и B соответственно в A' и B' , доказывается теоремой Бернулли — Шаля, согласно которой существует единственное вращение или единственная трансляция (параллельный перенос), преобразующие AB в $A'B'$.

[25] Заметим, что все точки B лежат на окружности с центром O и радиусом OA . Поэтому отрезок AB не может быть больше диаметра этой окружности. Точно так же точка B' лежит на окружности с центром O' и радиусом $O'A'$. Отсюда следует, что если любой отрезок AB равен какой-нибудь из хорд $A'B'$, то радиус первой окружности не превосходит радиуса второй: $OA \leq O'A'$.

[26] Это замечание можно сделать очевидным, если представить себе, что одна плоскость движется по другой. Если закрепить одну точку подвижной плоскости, то плоскость может вращаться около этой неподвижной (инвариантной) точки. Закрепляя плоскость еще в одной точке, мы сделаем ее неподвижной, в силу чего неподвижными (инвариантными) окажутся и все прямые.

[27] Здесь автор с полной убедительностью показывает, что выбираемая им система аксиом не случайна и что правила «геометрической игры» (см. примечание 17) получены в результате изучения свойств материальных объектов — системы инструментов (J).

[28] **Лексикографическое** расположение — такое, которое подобно расположению слов в словарях: сначала идут слова, начинающиеся с первой буквы алфавита, потом — со второй, с третьей и т. д. Если первые буквы слов одинаковы, то раньше идут слова, у которых вторые буквы идут впереди по алфавиту. Если одина-

ковы и первые и вторые буквы, то рассматривают третьи буквы и т. д. Аналогично можно расположить и тройки чисел. Например, тройка (1, 3, 7) идет впереди тройки (2, 1, 5); тройка (2, 1, 5) — впереди тройки (2, 3, 1), (2, 3, 2) — впереди (2, 3, 4) и т. д.

[29] Ввиду того что существование середины отрезка еще не доказано, доказать теорему о медиатрисе во всей общности нельзя.

[30] Центральная симметрия относительно точки a преобразует все точки прямой D в точки прямой D' , а точки прямой E — в точки прямой E' , и обратно — точки прямой D' в точки прямой D и точки E' — в точки прямой E . Отсюда следует, что точка (DE) , принадлежащая одновременно и D' и E , преобразуется в точку (DE') , принадлежащую одновременно и D и E' .

[31] Символами (D_1) , (D'_2) , (Δ) автор обозначает симметрии относительно прямых D , D' и Δ .

[32] Прямая называется ориентированной, если для каждой ее точки установлено, какой из двух лучей с вершиной в этой точке является положительным, какой отрицательным. Плоскость называется ориентированной, если для каждой ориентированной прямой этой плоскости установлено, какая из определяемых ею полуплоскостей положительна и какая отрицательна. Для ориентации прямой достаточно установить знаки лучей для одной ее точки, а для ориентации плоскости — установить знаки полуплоскостей для одной ориентированной прямой.

В дальнейшем изложении автор, рассматривая плоскость, как множество точек, устанавливает ориентацию ее подмножеств — треугольников и многоугольников.

[33] Речь здесь идет о том, что автор считает необходимым рассматривать педагогический процесс независимо от индивидуальных особенностей преподавателя и от его искусства.

[34] Автор имеет в виду те связи между математическими структурами и операторными структурами мышления, которые были описаны в первой статье Ж. Пиаже.

[35] Здесь опять идет речь о формировании в сознании учащихся математических структур параллельно с формированием операторных структур мышления.

[36] Необходимо обратить внимание на основную мысль автора, которую он проводит во всем дальнейшем изложении: в то время как в арифметике мы производим действия над числами и в результате вновь получаем число, в алгебре мы изучаем **только** операции и действия над ними. Каждое алгебраическое выражение представляет собой одну или несколько операций.

Преобразование алгебраических выражений, т. е. **операции над операциями**, и есть тот алгебраический динамизм, о котором автор говорит дальше.

[37] Действия $XY \rightleftharpoons YX$ и $V + U \rightleftharpoons U + V$ суть не что иное, как применения переместительного закона умножения и сложения при помощи которого преобразовывались предыдущие выражения

[38] Утверждение автора не совсем правильно: в равенстве $\frac{3a}{a} = 3$ число 3 есть результат алгебраической операции.

[39] В данном случае автор имеет в виду, что задачей алгебры является отыскание такого преобразования, которое дало бы возможность выразить неизвестное через остальные параметры. Определение же числового значения неизвестного он относит к задачам арифметики.

[40] По существу выражение $a^b = c$ допускает не одно, а два различных обращения:

$$a = \sqrt[b]{c} \text{ и } b = \lg_a c.$$

[41] Удвоение числа решений уравнения $x^2 = a^2$ есть результат преобразований:

$$x^2 - a^2 = 0 \text{ и } (x - a)(x + a) = 0, \text{ откуда } x = \pm a.$$

[42] Числовые результаты математических операций, с нашей точки зрения, являются не менее интересными и важными, чем чисто алгебраические действия.

[43] В арифметике при умножении суммы на сумму не производят почленного умножения, а сначала вычисляют первую сумму, потом—вторую и полученные числа перемножают. Поэтому автор называет арифметическое умножение сокращенным.

[44] См. примечание [42].

[45] Здесь автором подчеркивается то, что наиболее важным в рассматриваемых процессах является операторная сторона, т. е. применение различных преобразований, позволяющих от данной системы перейти к эквивалентной с разделенными переменными.

[46] Итерацией в математике называется периодическое повторение одних и тех же операций.

[47] Если в сумме $a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (a + nd)$ выделить сначала слагаемые a , то эта же сумма примет вид: $(n + 1)a + d + 2d + \dots + nd$. Применяя это же преобразование к обращенной сумме, первым членом которой является l — последний член первой суммы, то получим ту же сумму в виде: $(n + 1)l - d - 2d - \dots - nd$. Складывая почленно обе суммы, получим: $2S = (n + 1)a + (n + 1)l$.

[48] Алгебраические соотношения в системе уравнений изоморфно отображаются на их геометрическое изображение. Поэтому геометрическое изображение в одинаковой степени может определить «природу системы», как и алгебраическое исследование.

[49] Разделение переменных в системе линейного и квадратного уравнений не зависит от того, имеет или не имеет система действительные корни.

[50] История математики, а также методические соображения показывают как раз обратное. Поэтому высказывание автора о

том, что «в математических построениях общее обязательно предшествует частному» является весьма сомнительным.

[51] См. предыдущее примечание.

[52] Если одна окружность находится внутри другой, то могут быть рассмотрены такие положения: 1) первая находится внутри второй; 2) первая касается второй изнутри; 3) вторая находится внутри первой; 4) вторая касается первой изнутри.

[53] Утверждение автора справедливо только для того случая, когда радиус подвижной окружности меньше радиуса неподвижной.

[54] Короче говоря, учитель должен убедить учеников в том, что изучаемые ими свойства пространства относятся **только** к той ограниченной совокупности объектов, в которой производятся наши эксперименты.

[55] О соотношениях между физическим и математическим пространством см. две статьи «Пространство» в 36-м томе БСЭ.

[56] В случае прямого угла мы рассматриваем равнобедренные треугольники AMR и BMR (рис. 6). Обозначая величины углов при основании первого треугольника через α , а второго через β , получим, что $\angle ARB = \alpha + \beta$. Вместе с тем сумма внутренних углов в $\triangle ARB$ равна $2(\alpha + \beta) = 180^\circ$, т. е. $\alpha + \beta = 90^\circ$, откуда $\angle ARB = 90^\circ$.

Если же угол ARB — не прямой, то, сохраняя те же обозначения для $\triangle AMR$ и $\triangle BMR$ (рис. 7), получим, что $\angle AMB$ равен сумме двух внешних углов в $\triangle ARM$ и $\triangle BRM$, поэтому $\angle AMB = 2(\alpha + \beta)$, откуда $AMR = \alpha + \beta = \frac{1}{2}\angle AMB$. Но это и есть теорема о вписанном угле.

Вместе с тем и предыдущее предложение о вписанном прямом угле можно доказать с этой же точки зрения. На рисунке 6 $\angle AMB = 180^\circ$, поэтому $\angle ARB = 90^\circ$, т. е. предложение о прямом угле допускает два различных доказательства.

[57] Так как $\triangle ABC$ — прямоугольный при точке A и $AM \perp BC$, то, используя предыдущее построение, получим, что пл. $BSP = \text{пл. } ABN + \text{пл. } ACQ$. Но так как эти фигуры подобны, и площади подобных фигур относятся как квадраты сходственных сторон, то мы получим:

$$\frac{\text{пл. } ABM}{\text{пл. } BCP} = \frac{AB^2}{BC^2}, \quad \frac{\text{пл. } ACQ}{\text{пл. } BCP} = \frac{AC^2}{BC^2},$$

складывая почленно эти равенства, получим:

$$\frac{\text{пл. } ABM + \text{пл. } ACQ}{\text{пл. } BCP} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2}$$

Но левая часть последнего равенства равна единице, поэтому $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Понятно, что такое же соотношение мы получим, построив на BC , CA и AB какие угодно подобные между собой фигуры, лишь бы отрезки BC , CA и AB были сходственными в этом подобии.

[58] Если точка P находится вне квадрата Q , то отрезки AP и BP больше стороны квадрата Q , поэтому каждый из квадратов, построенных на этих отрезках, по площади больше Q .

[59] Необходимо заметить, что учебное пособие, подобное предложенному К. Гаттеню, в нашей учебной литературе было описано и издано массовым тиражом уже несколько десятилетий тому назад. Мы имеем в виду доску П. А. Карасева, устройство которой весьма похоже на «геоплоскость» Гаттеню и которая с большим успехом используется преподавателями (см. предисловие).

О Г Л А В Л Е Н И Е.

стр.

Г л а в а I. Ж. Пиаже. Структуры математические и операторные структуры мышления	10
Г л а в а II. Э. Бет. Размышления об организации и методе преподавания математики	31
Г л а в а III. Ж. Дьедонне. Абстракция в математике и эволюция алгебры	41
Г л а в а IV. А. Лихнерович. Проникновение духа современной алгебры в элементарную алгебру и геометрию	54
Г л а в а V. Г. Шоке. О преподавании элементарной геометрии	65
Г л а в а VI. К. Гаттеню. Педагогика математики	116
Примечания переводчика	155

Преподавание математики

*Ж. Пиаже, Э. Бет, Ж. Дьедонне,
А. Лихнерович, Г. Шоке, К. Гаттеньо*

Редактор *И. Я. Танатар*
Художник *В. И. Рывчин*
Художественный редактор *Б. Л. Николаев*
Технический редактор *М. С. Дранникова*
Корректор *Л. А. Козлова*

* * *

Сдано в набор 13/VI-1960 г. Подписано к печати
3/XII 1960 г. $60 \times 92\frac{1}{16}$. Печ. л. 10,25.
Уч.-изд. л. 10,07. Тираж 16 000 экз. А12132

Учпедгиз. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 4

Полиграфкомбинат Саратовского совнархоза,
г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.
Заказ № 1728

Цена без переплета 2 р. 70 к., переплет 80 к.